Examen Mardi 19 Décembre 2000

$1^{ère}$ **Partie**

1) On trouve comme d'habitude $\widehat{\lambda}_{MV} = \overline{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i$ après avoir vérifié que la vraisemblance possède un maximum global unique en ce point. Cet estimateur est sans biais, convergent (sa variance est $Var\widehat{\lambda}_{MV} = \frac{\lambda}{n}$) et efficace puisque la borne de Cramér Rao associée au paramètre λ est

$$BRC(\lambda) = \frac{-1}{E\left[\frac{-1}{\lambda^2} \sum_{i=1}^{n} X_i\right]} = \frac{\lambda^2}{n\lambda} = \frac{\lambda}{n}$$

2) Le théorème de la limite centrale donne

$$\frac{\widehat{\lambda}_{MV} - \lambda}{\sqrt{\lambda/n}} \sim \mathcal{N}(0,1) \text{ ou } \widehat{\lambda}_{MV} \sim \mathcal{N}\left(\lambda, \frac{\lambda}{n}\right)$$

Les tables donnent

$$P\left[\left(\frac{\widehat{\lambda}_{MV} - \lambda}{\sqrt{\lambda/n}}\right)^2 \leq (1.96)^2\right] = 0.95$$

c'est-à-dire

$$P\left[\widehat{\lambda}_{MV}^2 - 2\lambda\left(\widehat{\lambda}_{MV} + \frac{(1.96)^2}{2n}\right) + \lambda^2 \leq 0\right] = 0.95$$

et donc l'intervalle de confiance pour λ avec un seuil de confiance 0.95 est

$$\left[\widehat{\lambda}_{MV} + \frac{(1.96)^2}{2n} - \sqrt{\Delta}, \widehat{\lambda}_{MV} + \frac{(1.96)^2}{2n} + \sqrt{\Delta}\right]$$

avec $\Delta = \left(\widehat{\lambda}_{MV} + \frac{(1.96)^2}{2n}\right)^2 - \widehat{\lambda}_{MV}^2$.

3) La densité a posteriori du paramètre λ est

$$\begin{aligned} f(\lambda | x_1, ..., x_n) &\propto f(x_1, ..., x_n | \lambda) g(\lambda) \\ &\propto \lambda^{n\overline{x}} \exp[-\lambda(n+c)] \end{aligned}$$

d'où

$$\widehat{\lambda}_{MAP} = \frac{\widehat{\lambda}_{MV}}{1 + \frac{c}{n}}$$

Pour n grand, l'information a priori influe peu sur l'estimation et $\widehat{\lambda}_{MAP} \simeq \widehat{\lambda}_{MV}$.

$2^{ème}$ Partie

Le paramètre λ étant inconnu, on l'estime à l'aide de la méthode du maximum de vraisemblance et on obtient

$$\widehat{\lambda}_{MV} = 0.8$$

On construit trois classes le plus équiprobables possibles à savoir

$$\begin{array}{lcl} \text{Classe 1} & : & X = 0 \text{ de probabilité } p_1 = 0.4493 \\ \text{Classe 2} & : & X = 1 \text{ de probabilité } p_2 = 0.3595 \\ \text{Classe 3} & : & X \geq 2 \text{ de probabilité } p_3 = 0.1912 \end{array}$$

On remarque que la condition $np_k > 4$ ou 5 n'est pas vérifiée au moins pour les classes 2 et 3 et donc il faudra se méfier des résultats de ce test. Les effectifs des trois classes calculés à l'aide des données sont $n_1 = 3, n_2 = 6$ et $n_3 = 1$. On en déduit

$$A = \sum_{i=1}^{3} \frac{1}{np_i} (n_i - np_i)^2 = 2.54$$

On a estimé un paramètre donc la loi asymptotique de A est une loi du χ_1^2. Pour $\alpha = 0.05$, on trouve $S_\alpha = 3.841$ et donc on accepte l'hypothèse H_0 avec $\alpha = 0.05$.

$3^{ème}$ Partie

1) Des calculs élémentaires donnent

$$\text{Rejet de } H_0 \text{ si } T = \sum_{i=1}^{n} X_i < S_\alpha$$

2) La fonction caractéristique de T est

$$E\left[e^{itT}\right] = \prod_{j=1}^{n} E\left[e^{itX_j}\right] = \exp\left[n\lambda\left(e^{it} - 1\right)\right]$$

qui est la fonction caractéristique d'une loi de Poisson de paramètre $n\lambda$ donc $T \sim P(n\lambda)$.

Sous H_0, on a $T \sim P(n\lambda_0) = P(10)$ et sous H_1 on a $T \sim P(n\lambda_1) = P(1)$.

3) On a $\alpha = P[\text{rejeter } H_0 | H_0 \text{ vraie}] = P[T < S_\alpha | T \sim P(n\lambda_0) = P(10)]$. En analysant les tables de la loi de Poisson $P(10)$, on trouve

$$S_\alpha = 5 \Rightarrow \alpha = 0.0293 \text{ et } S_\alpha = 6 \Rightarrow \alpha > 0.05$$

Donc le test est défini par

$$\text{Rejet de } H_0 \text{ si } T < 5$$

et le risque de première espèce associé est $\alpha = 0.0293 < 0.05$. Les données sont telles que $\sum_{i=1}^{n} x_i = 8$ et donc on accepte l'hypothèse H_0 avec $\alpha = 0.0293$. Le calcul de la puissance du test conduit à

$$\begin{array}{rcl} \pi & = & 1 - \beta = P[\text{rejeter } H_0 | H_1 \text{ vraie}] \\ & = & P[T < 5 | T \sim P(1)] \\ & = & \displaystyle\sum_{i=0}^{4} p_i \sim 0.9963 \end{array}$$

La puissance du test est donc excellente.

4) a) Pour n grand, l'approximation normale est $\sum_{i=1}^{n} X_i \sim \mathcal{N}(n\lambda, n\lambda)$

b) On trouve $K_\alpha = n\lambda_0 + \sqrt{n\lambda_0}\Phi^{-1}(\alpha) \sim 4.8$. On trouve 4.8 au lieu de 5 et donc l'approximation est satisfaisante pour $n = 10$ (puisque T prend des valeurs discrètes avoir $T < 5$ ou $T < 4.8$, c'est la même chose)..

c) Un calcul simple conduit à

$$PD = 1 - \beta = \Phi\left(\sqrt{n}\frac{\lambda_0 - \lambda_1}{\sqrt{\lambda_1}} + \sqrt{\frac{\lambda_0}{\lambda_1}}\Phi^{-1}(\alpha)\right)$$

c'est-à-dire asymptotiquement

$$PD = 1 - \beta \sim \Phi\left(\sqrt{n}\frac{\lambda_0 - \lambda_1}{\sqrt{\lambda_1}}\right)$$

Le paramètre qui règle la performance asymptotique du test est donc $\sqrt{n}\frac{\lambda_0-\lambda_1}{\sqrt{\lambda_1}}$. Dans les deux cas proposés $\lambda_0 - \lambda_1 = 0.9$ et $n = 100$. Le premier test est meilleur car PD est une fonction décroissante de λ_1 lorsque $\lambda_0 - \lambda_1$ et n sont fixés.