Examen Mardi 8 Janvier 2002

Exercice 1

1) La vraisemblance de $(X_1, ..., X_n)$ est :

$$\begin{aligned} L(x_1, ..., x_n; \theta) &= P[X_1 = x_1, ..., X_n = x_n] \\ &= \prod_{i=1}^{n} P[X_i = x_i] = \prod_{i=1}^{n} p(1-p)^{x_i} \end{aligned}$$

c'est-à-dire

$$L(x_1, ..., x_n; \theta) = p^n (1-p)^{n\overline{x}}$$

avec la notation standard $\overline{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$. Pusique $p = \frac{1}{1+\theta}$, on en déduit :

$$L(x_1, ..., x_n; \theta) = \frac{1}{(1+\theta)^n} \left(\frac{\theta}{1+\theta}\right)^{n\overline{x}}$$

Lorsqu'on étudie

$$\frac{\partial LnL(x_1, ..., x_n; \theta)}{\partial \theta} \geq 0 \Leftrightarrow \frac{-n}{1+\theta} + n\overline{x}\frac{1+\theta}{\theta}\frac{1}{(\theta+1)^2} \geq 0$$

on obtient $\theta \leq \overline{x}$. Puisque la vraisemblance est maximale pour $\theta = \overline{x}$ et que ce maximum est un maximum global unique, on déduit

$$\widehat{\theta}_{MV} = \overline{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$$

2) On a

$$\begin{aligned} E\left[\widehat{\theta}_{MV}\right] &= E[X_1] = \theta \text{ donc } \widehat{\theta}_{MV} \text{ est un estimateur non biaisé de } \theta \\ var\left[\widehat{\theta}_{MV}\right] &= \frac{var[X_1]}{n} = \frac{1}{n}\frac{1-p}{p}\frac{1}{p} = \frac{\theta(1+\theta)}{n} \end{aligned}$$

Puisque $\widehat{\theta}_{MV}$ est un estimateur non biaisé de θ et que $\lim_{n\to\infty} var\left[\widehat{\theta}_{MV}\right] = 0$, $\widehat{\theta}_{MV}$ converge en moyenne quadratique vers θ.

3) On a

$$\frac{\partial^2 LnL(x_1, ..., x_n; \theta)}{\partial \theta^2} = \frac{n}{(1+\theta)^2} + n\overline{x}\frac{-(1+2\theta)}{\theta^2(\theta+1)^2}$$

Donc

$$E\left[\frac{\partial^2 LnL(X_1, ..., X_n; \theta)}{\partial \theta^2}\right] = \frac{n}{(1+\theta)^2} + n\theta\frac{-(1+2\theta)}{\theta^2(\theta+1)^2} = -\frac{n}{\theta(1+\theta)}$$

On en déduit que la borne de Rao-Cramer pour un estimateur non biaisé de θ est :

$$BRC(\theta) = \frac{\theta(1+\theta)}{n} = var\left[\widehat{\theta}_{MV}\right]$$

$\widehat{\theta}_{MV}$ est donc l'estimateur efficace de θ.

4) D'après la théorème de la limite centrale, on

$$T = \frac{\overline{X} - \theta}{\sqrt{\frac{\theta(1+\theta)}{n}}} \underset{n\to\infty}{\overset{L}{\longrightarrow}} \mathcal{N}(0,1)$$

Donc, pour n "grand", on peut approcher la loi de $\overline{X}$ par la loi normale $\mathcal{N}\left(\theta, \frac{\theta(1+\theta)}{n}\right)$. Dans les tables de la loi normale, on lit

$$P\left[|T| < 1.96\right] = 0.95$$

Donc

$$P\left[\left(\overline{X} - \theta\right)^2 < (1.96)^2 \frac{\theta(1+\theta)}{n}\right] = 0.95$$

On en déduit que l'équation du second degré qui permet de déterminer l'intervalle de confiance pour θ est

$$\left(\overline{X} - \theta\right)^2 = (1.96)^2 \frac{\theta(1+\theta)}{n}$$

c'est-à-dire

$$\theta^2 \left(\frac{(1.96)^2}{n} - 1\right) + \theta\left(\frac{(1.96)^2}{n} + 2\overline{X}\right) - \overline{X}^2 = 0$$

Exercice 2

D'après la loi de Bayes, puisque $P\left[\theta = (i,j)\right] = \frac{1}{4}$, on a :

$$\begin{aligned}
p_{00} &= \frac{\frac{1}{4}\frac{1}{2\pi\sigma^2}\exp -\frac{1}{2\sigma^2}\left\{x^2+y^2\right\}}{f(x,y)} \\
p_{11} &= \frac{\frac{1}{4}\frac{1}{2\pi\sigma^2}\exp -\frac{1}{2\sigma^2}\left\{(x-1)^2+(y-1)^2\right\}}{f(x,y)} \\
p_{01} &= \frac{\frac{1}{4}\frac{1}{2\pi\sigma^2}\exp -\frac{1}{2\sigma^2}\left\{x^2+(y-1)^2\right\}}{f(x,y)} \\
p_{10} &= \frac{\frac{1}{4}\frac{1}{2\pi\sigma^2}\exp -\frac{1}{2\sigma^2}\left\{(x-1)^2+y^2\right\}}{f(x,y)}
\end{aligned}$$

avec

$$\begin{aligned}
f(x,y) &= \frac{1}{4}\frac{1}{2\pi\sigma^2}\exp -\frac{1}{2\sigma^2}\left\{x^2+y^2\right\} + \frac{1}{4}\frac{1}{2\pi\sigma^2}\exp -\frac{1}{2\sigma^2}\left\{(x-1)^2+(y-1)^2\right\} \\
&\quad + \frac{1}{4}\frac{1}{2\pi\sigma^2}\exp -\frac{1}{2\sigma^2}\left\{x^2+(y-1)^2\right\} + \frac{1}{4}\frac{1}{2\pi\sigma^2}\exp -\frac{1}{2\sigma^2}\left\{(x-1)^2+y^2\right\}.
\end{aligned}$$

2) L'estimateur qui minimise $E\left[\left(\widehat{\theta}-\theta\right)^2\right]$ est défini par :

$$\begin{aligned}
\widehat{\theta}_{MMSE} &= E\left[\theta|\, z\right] \\
&= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} p_{00} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} p_{01} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} p_{10} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} p_{11} \\
&= \begin{pmatrix} p_{10}+p_{11} \\ p_{01}+p_{11} \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

L'estimateur n'est pas adapté au problème posé car $\widehat{\theta}_i \notin \{0,1\}$.

3) On a

$$\widehat{\theta}_{MAP} = (0,0) \text{ si } \begin{cases} p_{00} \geq p_{01} \\ p_{00} \geq p_{10} \\ p_{00} \geq p_{11} \end{cases}$$

c'est-à-dire

$$\widehat{\theta}_{MAP} = (0,0) \text{ si } \begin{cases} d^2\left(\theta, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right) \leq d^2\left(\theta, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right) \\ d^2\left(\theta, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right) \leq d^2\left(\theta, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right) \\ d^2\left(\theta, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right) \leq d^2\left(\theta, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right) \end{cases}$$

où $d(A,B)$ est la distance euclidienne entre les points A et B. On voit alors que $\widehat{\theta}_{MAP} = (0,0)$ correspond au quart de plan $x \leq 0.5$ et $y \leq 0.5$. De même

$$\begin{aligned}
\widehat{\theta}_{MAP} &= (1,0) \text{ si } x \geq 0.5 \text{ et } y \leq 0.5 \\
\widehat{\theta}_{MAP} &= (0,1) \text{ si } x \leq 0.5 \text{ et } y \geq 0.5 \\
\widehat{\theta}_{MAP} &= (1,1) \text{ si } x \geq 0.5 \text{ et } y \geq 0.5
\end{aligned}$$

Cette règle de décision revient à décider que θ est le point le plus proche de (x,y).

4) Lorsque $p < 0.5$, le bit "0" est moins probable que le bit "1" et donc on décide plus souvent que "1" a été émis. Les décisions se font alors par rapport aux droites d'équations
$x = 0.5 + \sigma^2 \ln\left(\frac{p}{1-p}\right) < 0.5$ et $y = 0.5 + \sigma^2 \ln\left(\frac{p}{1-p}\right) < 0.5$.

Exercice 3

1) Des calculs classiques permettent d'obtenir la règle de décision suivante :

$$\begin{aligned}
\text{Si } \sigma_1 &> \sigma_0, \text{ rejet de } H_0 \text{ si } T = \sum_{i=1}^{n} X_i^2 > S_\alpha \\
\text{Si } \sigma_1 &< \sigma_0, \text{ rejet de } H_0 \text{ si } T = \sum_{i=1}^{n} X_i^2 < S_\alpha
\end{aligned}$$

La statistique du test est donc $T = T(X_1, ..., X_n) = \sum_{i=1}^{n} X_i^2$, c'est-à-dire n fois le moment d'ordre 2 empirique des variables X_i. Ceci semble naturel puisque $E\left[X_i^2\right] = \sigma^2$ varie sous les deux hypothèses H_0 et H_1.

2) Le risque de première espèce est :

$$\begin{aligned}\alpha &= P\left[\text{rejeter } H_0 \middle| H_0 \text{ vraie}\right] \\ &= P\left[T > S_\alpha \middle| \sigma = \sigma_0\right] \\ &= P\left[\frac{1}{\sigma_0^2}T > \frac{S_\alpha}{\sigma_0^2} \middle| \sigma = \sigma_0\right]\end{aligned}$$

On sait que $\frac{1}{\sigma_0^2}T$ suit une loi du chi2 à n degrés de liberté sous l'hypothèse H_0, donc

$$\alpha = \Phi_n\left(\frac{S_\alpha}{\sigma_0^2}\right) \text{ i.e. } S_\alpha = \sigma_0^2\Phi_n^{-1}(\alpha)$$

Pour $\sigma_0 = 1$ et $n = 60$, on obtient $S_\alpha \simeq 88.38$. Le risque β peut alors se calculer comme suit :

$$\begin{aligned}\beta &= P\left[\text{rejeter } H_1 \middle| H_1 \text{ vraie}\right] \\ &= P\left[T \leq S_\alpha \middle| \sigma = \sigma_1\right] \\ &= 1 - P\left[T > S_\alpha \middle| \sigma = \sigma_1\right] \\ &= 1 - \Phi_n\left(\frac{S_\alpha}{\sigma_1^2}\right)\end{aligned}$$

Les tables de la loi du chi2 permettent d'obtenir $\beta \in [0.05, 0.1]$.

3) Les courbes COR sont définies par

$$\begin{aligned}PD &= 1 - \beta = \Phi_n\left(\frac{S_\alpha}{\sigma_1^2}\right) \\ PD &= \Phi_n\left(\frac{\sigma_0^2}{\sigma_1^2}\Phi_n^{-1}(\alpha)\right)\end{aligned}$$

On voit donc que PD est une fonction décroissante de $\frac{\sigma_0^2}{\sigma_1^2}$, c'est-à-dire une fonction croissante de $\frac{\sigma_1^2}{\sigma_0^2}$, ce qui est normal.

4) Le théorème de la limite centrale nous permet d'approcher, pour n "grand", la loi de $T(X_1, ..., X_n) = \sum_{i=1}^{n} X_i^2$ par une loi normale $\mathcal{N}\left(nE\left[X_1^2\right], nVar\left[X_1^2\right]\right)$. Mais

$$\begin{aligned}E\left[X_1^2\right] &= \sigma^2 \\ var\left[X_1^2\right] &= E\left[X_1^4\right] - E\left[X_1^2\right]^2 = 3\sigma^4 - \sigma^4 = 2\sigma^4\end{aligned}$$

Donc, on peut approcher la loi de T par une loi normale $\mathcal{N}(n\sigma^2, n2\sigma^4)$. En posant $\Psi(u) = \int_u^\infty \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}dx$, on en déduit :

$$\begin{aligned}\alpha &= P\left[\text{rejeter } H_0 \middle| H_0 \text{ vraie}\right] \\ &= P\left[\frac{T - n\sigma^2}{\sqrt{2n}\sigma^2} > \frac{S_\alpha - n\sigma^2}{\sqrt{2n}\sigma^2} \middle| \sigma = \sigma_0\right] \\ &= \Psi\left(\frac{S_\alpha - n\sigma_0^2}{\sqrt{2n}\sigma_0^2}\right)\end{aligned}$$

d'où $S_\alpha = \Psi^{-1}(\alpha)\sqrt{2n}\sigma_0^2 + n\sigma_0^2$ et

$$\begin{aligned}
\beta &= P\left[\text{rejeter } H_1 \middle| \, H_1 \text{ vraie}\right] \\
&= P\left[T \leq S_\alpha \middle| \, \sigma = \sigma_1\right] \\
&= 1 - P\left[T > S_\alpha \middle| \, \sigma = \sigma_1\right] \\
&= 1 - \Phi_n\left(\frac{S_\alpha - n\sigma_1^2}{\sqrt{2n}\sigma_1^2}\right)
\end{aligned}$$

Pour $n = 100$, on obtient

$$\beta \simeq 8.9 \; 10^{-3}$$