Correction Examen Jeudi 7 mars 2002

Exercice 1

1) On pose $z-2=\rho e^{i(\theta+2k\pi)}$ avec $0<\theta<2\pi$ et on obtient la détermination de rang k de la fonction $f(z)$:

$$f_k(z)=z\left[\ln\rho+i\left(\theta+2k\pi\right)\right]^2$$

qui admet pour coupure l'axe $[2,+\infty[$. Sur le bord supérieur de la coupure, on a $\theta=0,\rho=x-2$ et $z=x$. Pour avoir une valeur réelle sur le bord supérieur de la coupure, il suffit donc de choisir $k=0$, c'est-à-dire de travailler avec la détermination principale de $f(z)$:

$$f_0(z)=z\left[\ln\rho+i\theta\right]^2$$

Sur le bord inférieur de la coupure on a $\theta=2\pi,\rho=x-2$ et $z=x$. Donc

$$f_0\left(z\right)=x\left[\ln\left(x-2\right)+i2\pi\right]^2$$

tandis que sur le bord supérieur de la coupure, on a

$$f_0\left(z\right)=x\left[\ln\left(x-2\right)\right]^2$$

2) Pour déterminer le résidu de la fonction $g(z)$ au point $z=-1$, on peut faire le développement de Laurent de g au point $z=-1$, c'est-à-dire effectuer le développement de Taylor de $f(z)=g(z)\left(1+z\right)^3$, puis diviser le tout par $\left(1+z\right)^3$. On peut aussi appliquer la formule du cours :

$$resg\left(-1\right)=\frac{1}{2}\frac{d^2}{dz^2}\left[g(z)\left(1+z\right)^3\right]\Big|_{z=-1}$$

Nous optons pour cette seconde méthode même si le développement de Laurent ne pose pas de problème :

$$g(z)\left(1+z\right)^3=f(z)=z\left[\log\left(z-2\right)\right]^2$$

donc :

$$\begin{aligned} f'(z) &= \left[\log\left(z-2\right)\right]^2+2z\frac{\log\left(z-2\right)}{z-2} \\ &= \left[\log\left(z-2\right)\right]^2+2\log\left(z-2\right)+4\frac{\log\left(z-2\right)}{z-2} \end{aligned}$$

d'où

$$f''(z)=2\frac{\log\left(z-2\right)}{z-2}+\frac{2}{z-2}+4\left[\frac{1}{\left(z-2\right)^2}-\frac{\log\left(z-2\right)}{\left(z-2\right)^2}\right]$$

On voit que pour évaluer cette fonction au point $z=-1$, il faut calculer $\log(-3)$. En utilisant la détermination principale du logarithme de $z-2$ et en remarquant qu'en $z=-1$, on a $\rho=3$ et $\theta=\pi$, on obtient :

$$\log\left(-3\right)=\ln\rho+i\theta=\ln 3+i\pi$$

d'où

$$f''(-1) = 2\frac{\ln 3 + i\pi}{-3} + \frac{2}{-3} + 4\left[\frac{1}{9} - \frac{\ln 3 + i\pi}{9}\right]$$

c'est-à-dire

$$f''(1) = -\frac{10}{9}\ln 3 - \frac{2}{9} - \frac{10}{9}i\pi$$

et

$$\boxed{resg\,(-1) = -\tfrac{5}{9}\ln 3 - \tfrac{1}{9} - \tfrac{5}{9}i\pi}$$

3) Lorsqu'on applique le théorème des résidus à la fonction g sur le contour proposé, on obtient :

$$\int_{AB\cup C_R\cup DC\cup\gamma_\varepsilon} g(z)dz = (2i\pi)\,resg\,(-1)$$

car la seule singularité située à l'intérieur du contour est $z_0 = -1$. En admettant pour l'instant que les intégrales sur C_R et sur γ_ε tendent vers 0, lorsque $R \to +\infty$ et $\varepsilon \to 0$, on obtient :

$$\int_{AB} g(z)dz \underset{R\to+\infty,\varepsilon\to 0}{\longrightarrow} \int_2^{+\infty} \frac{x\left[\ln(x-2)\right]^2}{(1+x)^3}dx$$

$$\int_{DC} g(z)dz \underset{R\to+\infty,\varepsilon\to 0}{\longrightarrow} -\int_2^{+\infty} \frac{x\left[\ln(x-2)+2i\pi\right]^2}{(1+x)^3}dx$$

Lorsqu'on fait la somme de ces deux intégrales, les termes en $\frac{x[\ln(x-2)]^2}{(1+x)^3}$ disparaissent et on obtient

$$-4i\pi\int_2^{+\infty}\frac{x\ln(x-2)}{(1+x)^3}dx + 4\pi^2\int_2^{+\infty}\frac{x}{(1+x)^3}dx = -4i\pi I + 4\pi^2 J$$

d'où, par identification

$$\boxed{I = \tfrac{1}{18} + \tfrac{5}{18}\ln 3 \text{ et } J = \tfrac{5}{18}}$$

Montrons maintenant que l' intégrale sur γ_ε tend vers 0 lorsque $\varepsilon \to 0$. Pour cela, on utilise le premier lemme de Jordan qui nécessite d'étudier

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\sup_{\gamma_\varepsilon}\left|(z-2)\,g(z)\right|$$

Sur γ_ε, on a $z - 2 = \varepsilon e^{i\theta}$ avec $0 \le \theta \le 2\pi$. Donc :

$$\left|(z-2)\,g(z)\right| = \frac{\varepsilon\left|2+\varepsilon e^{i\theta}\right|\left|\ln\varepsilon + i\theta\right|^2}{\left|(3+\varepsilon e^{i\theta})^3\right|}$$

Mais $\left|2+\varepsilon e^{i\theta}\right| \le 2+\epsilon$, $\left|\ln\varepsilon + i\theta\right| \le \left|\ln\varepsilon\right| + 2\pi$ et $\left|3+\varepsilon e^{i\theta}\right| \ge |3| - \left|\varepsilon e^{i\theta}\right| = 3-\varepsilon$, d'où

$$0 \le \left|(z-2)\,g(z)\right| \le \frac{\epsilon\,(2+\epsilon)\left(\left|\ln\varepsilon\right|+2\pi\right)^2}{(3-\varepsilon)^3}$$

Le dernier terme tendant vers 0 lorsque $\varepsilon \to 0$ indépendamment de θ, on en déduit

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\sup_{\gamma_\varepsilon}\left|(z-2)\,g(z)\right| = 0$$

D'après le premier lemme de Jordan, on a alors

$$\boxed{\lim_{\varepsilon \to 0} \int_{\gamma_\varepsilon} g(z)dz = 0}$$

De même, sur C_R, on pose $z = R\,e^{i\theta}$. Puisque $|1+z| \geq |z| - 1 = R - 1$, $\rho \leq R + 2$ (faire un petit dessin et c'est élémentaire) et $\theta \leq 2\pi$, on a :

$$0 \leq |zg(z)| \leq \frac{R^2 \left[\ln(R+2) + 2\pi\right]^2}{(R-1)^3},$$

on a

$$\lim_{R \to +\infty} \sup_{C_R} |zg(z)| = 0$$

d'où, d'après le premier lemme de Jordan :

$$\boxed{\lim_{R \to +\infty} \int_{C_R} g(z)dz = 0}$$

Exercice 2

1) La transformée de Laplace de $\dfrac{\partial u(x,t)}{\partial t}$ est :

$$TL\left[\frac{\partial u(x,t)}{\partial t}\right] = pU(x,p) - u(x,0) = pU(x,p) - 6e^{-3x}$$

La transformée de Laplace de $\dfrac{\partial u(x,t)}{\partial x}$ est :

$$TL\left[\frac{\partial u(x,t)}{\partial x}\right] = \int_0^{+\infty} \frac{\partial u(x,t)}{\partial x} e^{-pt} dt$$

En supposant qu'on peut intervertir le signe $\int_0^{+\infty}$ et $\dfrac{\partial}{\partial x}$, on obtient :

$$TL\left[\frac{\partial u(x,t)}{\partial x}\right] = \frac{\partial}{\partial x}\left[\int_0^{+\infty} u(x,t)e^{-pt}dt\right] = \frac{\partial U(x,p)}{\partial x}$$

d'où l'équation différentielle :

$$\boxed{\frac{\partial U(x,p)}{\partial x} - (2p+1)\,U(x,p) = -12e^{-3x}, \qquad x > 0}$$

2) On pose $F(x,p) = U(x,p)e^{-(2p+1)x}$ i.e. $U(x,p) = e^{(2p+1)x}F(x,p)$. Alors

$$\frac{\partial U(x,p)}{\partial x} = \frac{\partial F(x,p)}{\partial x} e^{(2p+1)x} + (2p+1)\,e^{(2p+1)x}F(x,p)$$

En remplaçant $\dfrac{\partial U(x,p)}{\partial x}$ dans l'équation précédente, on obtient :

$$\boxed{\tfrac{\partial F(x,p)}{\partial x} = -12e^{-(2p+4)x} \qquad x > 0}$$

Par intégration, on obtient :

$$\begin{aligned} F(x,p) &= \frac{6}{p+2}e^{-(2p+4)x} + C(p) \\ \text{ou } U(x,p) &= \frac{6}{p+2}e^{-3x} + C(p)e^{(2p+1)x} \end{aligned}$$

La condition limite $u(0,t) = 6e^{-2t}, t > 0$ donne $U(0,p) = \frac{6}{p+2}$ d'où

$$\boxed{C(p) = 0 \text{ et } U(x,p) = \frac{6}{p+2}e^{-3x}}$$

3) La formule d'inversion appliquée à $U(x,p)$ donne :

$$u(x,t) = \sum_{p \in In(C)} res\left\{U(x,p)e^{pt}\right\}$$

où $In(C)$ est l'intérieur d'un contour constitué d'une droite inclue dans le domaine de convergence (ici l'abcisse de convergence est $x_c = -2$) bouclée par un arc de cercle centré sur l'origine. La seule singularité contenue dans ce domaine est $p = -2$ qui est un pôle d'ordre 1, d'où :

$$u(x,t) = \lim_{p \to -2}(p+2)U(x,p)e^{pt} = 6e^{-2t}e^{-3x}$$

ce résultat n'est valable que pour $t > 0$ (pour que le deuxième lemme de Jordan puisse s'appliquer sur le demi cercle de gauche) et pour $x > 0$ (condition imposée dans l'énoncé).

Exercice 3

1) On a

$$n_0 y(n) = x(n) + x(n-1) + ... + x(n-n_0)$$

En prenant la transformée en Z de cette égalité, on obtient :

$$\begin{aligned} n_0 Y(z) &= X(z) + X(z)z^{-1} + ... + X(z)z^{-n_0} \\ &= \left(1 + z^{-1} + ... + z^{-n_0}\right)X(z) \end{aligned}$$

c'est-à-dire

$$Y(z) = \frac{1}{n_0}\frac{1 - z^{-(n_0+1)}}{1 - z^{-1}}X(z)$$

On en conclut alors que $y(n)$ est la sortie d'un filtre linéaire de transmittance

$$\boxed{H(z) = \frac{1}{n_0}\frac{1-z^{-(n_0+1)}}{1-z^{-1}}}$$

et de réponse impulsionnelle

$$h(n) = \frac{1}{n_0}TZ^{-1}\left[\frac{1}{1-z^{-1}}\right] - \frac{1}{n_0}TZ^{-1}\left[\frac{z^{-(n_0+1)}}{1-z^{-1}}\right]$$

d'où

$$\boxed{h(n) = \frac{1}{n_0}\left[u(n) - u(n-n_0-1)\right]}$$

où $u(n)$ est l'échelon de Heaviside :

$$\begin{aligned} u(n) &= 1 \text{ si } n \geq 0 \\ u(n) &= 0 \text{ sinon} \end{aligned}$$

2) Vous avez vu en cours (et en TD) que la TZ de $x(n) = a^n u(n)$ est

$$X(z) = \frac{1}{1 - az^{-1}} = \frac{z}{z - a}$$

On en déduit

$$\begin{aligned} Y(z) &= \frac{z}{z-a} H(z) \\ &= \frac{z}{z-a} \frac{1}{n_0} \left[1 + z^{-1} + ... + z^{-n_0}\right] \end{aligned}$$

et

$$Y(z) z^{n-1} = \frac{1}{n_0} \frac{z^n + z^{n-1} + ... + z^{n-n_0}}{z - a}$$

On voit donc que pour $n \geq n_0$, $Y(z)z^{n-1}$ ne possède qu'un pôle simple $z = a$, ce qui permet d'obtenir :

$$\begin{aligned} y(n) &= res \left[Y(z) z^{n-1}\right]\Big|_{z=a} \\ &= \lim_{z \to a} (z - a) Y(z) z^{n-1} = \frac{a^n + ... + a^{n-n_0}}{n_0} \end{aligned}$$

c'est-à-dire

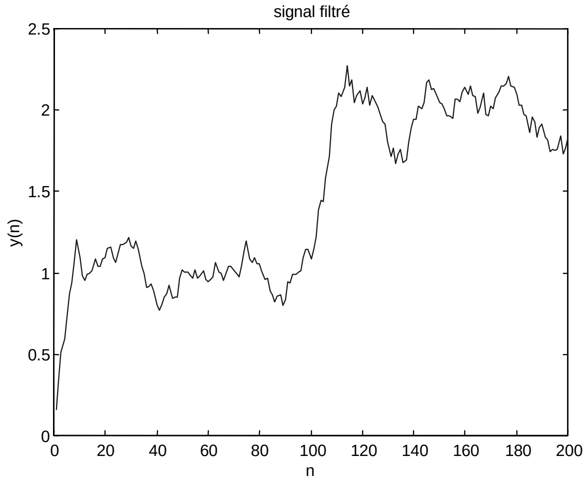
$$\boxed{y(n) = \frac{a^{n-n_0}}{n_0} \frac{1-a^{n_0+1}}{1-a} \text{ pour } n \geq n_0}$$

Notons que ce dernier résultat n'est valable que pour $n \geq n_0$, car pour $n < n_0$, $z = 0$ est aussi un pôle de $Y(z)z^{n-1}$.

On peut trouver ce résultat plus simplement à l'aide de la définition de $y(n)$:

$$\begin{aligned} n_0 y(n) &= x(n) + x(n-1) + ... + x(n - n_0) \\ &= a^n + a^{n-1} + ... + a^{n-n_0} \text{ si } n \geq n_0 \\ &= a^{n-n_0} \frac{1 - a^{n_0+1}}{1 - a} \end{aligned}$$

3) L'opération $y(n) = \frac{1}{n_0} \sum\limits_{k=n-n_0}^{n} x(k)$ effectue un moyennage de $x(n), ..., x(n - n_0)$, c'est-à-dire des $n_0 + 1$ dernières valeurs du signal x. Lorsque le signal oscille autour d'une valeur constante C, l'effet du moyennage est de diminuer les oscillations autour de cette constante. Prenons par exemple $n_0 = 9$, on obtient le signal filtré suivant :



Cette technique peut être utilisée pour débruiter le signal $x(n)$.