Correction Examen 12 mars 2003

Exercice 1

1) Pour définir les déterminations de f, il suffit de poser $z = \rho e^{i(\theta+2k\pi)}$ pour obtenir :

$$\begin{aligned}\sqrt{z} &= z^{\frac{1}{2}} = \sqrt{\rho} e^{i\frac{\theta}{2}} e^{ik\pi} \\ \log z &= \ln \rho + i(\theta + 2k\pi)\end{aligned}$$

Les déterminations de f sont donc définies par

$$f_k(z) = \sqrt{\rho} e^{i\frac{\theta}{2}} e^{ik\pi} \frac{\ln \rho + i(\theta + 2k\pi)}{z^2 + a^2}$$

On choisit comme coupure l'axe $[0, +\infty[$, ce qui correspond à $\theta \in]0, 2\pi[$. Sur le bord supérieur de la coupure, on a $\theta = 0, \rho = x$ et $z = x$, d'où

$$f_k(z) = \sqrt{x} e^{ik\pi} \frac{\ln x + i2k\pi}{x^2 + a^2}$$

La détermination de f qui vaut $\frac{\sqrt{x}\ln x}{x^2+a^2}$ sur le bord supérieur de la coupure est donc obtenue pour $k = 0$. C'est la détermination principale de $f(z)$:

$$f_0(z) = \sqrt{\rho} e^{i\frac{\theta}{2}} \frac{\ln \rho + i\theta}{z^2 + a^2}$$

La valeur de cette détermination sur l'axe $]-\infty, 0[$ est obtenue pour $\theta = \pi$ et $\rho = -x$, c'est-à-dire

$$i\sqrt{-x} \frac{\ln(-x) + i\pi}{x^2 + a^2}$$

Les points singuliers isolés de f sont $z = ia$ et $z = -ia$. Ces points singuliers sont des pôles simples. Donc les résidus se calculent simplement :

$$\begin{aligned}\text{res} f\,(ia) &= \frac{P(ia)}{Q'(ia)} \\ &= \frac{P(ia)}{2ia}\end{aligned}$$

On calcule $P(ia)$ à l'aide de $\rho = a$, $\theta = \frac{\pi}{2}$ et $\sqrt{\rho} e^{i\frac{\theta}{2}} [\ln \rho + i\theta]$, donc

$$\begin{aligned}\text{res} f\,(ia) &= \frac{\sqrt{a} e^{i\frac{\pi}{4}} \left[\ln a + i\frac{\pi}{2}\right]}{2ia} \\ &= \frac{\sqrt{a}}{2ia} \frac{\sqrt{2}}{2} (1 + i) \left[\ln a + i\frac{\pi}{2}\right]\end{aligned}$$

De la même façon,

$$\operatorname{res} f(-ia) = \frac{P(-ia)}{Q'(-ia)} = \frac{P(-ia)}{-2ia}$$

Au point $z = -ia$, on a $\rho = a$, $\theta = -\frac{\pi}{2}$ et

$$\begin{array}{rcl} P(-ia) & = & \sqrt{\rho}e^{i\frac{\theta}{2}}\left[\ln\rho + i\theta\right] \\ & = & \sqrt{a}e^{-i\frac{\pi}{4}}\left[\ln a - i\dfrac{\pi}{2}\right] \end{array}$$

d'où

$$\operatorname{res} f(-ia) = \frac{\sqrt{a}}{-2ia}\frac{\sqrt{2}}{2}(1-i)\left[\ln a - i\frac{\pi}{2}\right]$$

2) 2.1) De manière très classique, on paramètre le cercle γ_ε par $z = \varepsilon e^{i\theta}$ avec $\theta \in]0, \pi[$. On a dans ce cas $\rho = \varepsilon$ et donc :

$$|zf(z)| = \left|\varepsilon\frac{\sqrt{\varepsilon}e^{i\frac{\theta}{2}}\left[\ln\varepsilon + i\theta\right]}{\varepsilon^2 e^{2i\theta} + a^2}\right|$$

En utilisant les majorations classiques

$$\begin{array}{rcl} |\ln\varepsilon + i\theta| & \leq & |\ln\varepsilon| + \theta \leq |\ln\varepsilon| + \pi \\ \left|\varepsilon^2 e^{2i\theta} + a^2\right| & \geq & a^2 - \varepsilon^2 \end{array}$$

on obtient sur le cercle γ_ε la majoration

$$0 \leq |zf(z)| \leq \varepsilon\sqrt{\varepsilon}\frac{|\ln\varepsilon| + \pi}{a^2 - \varepsilon^2}$$

d'où

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\sup_{\gamma_\varepsilon}|zf(z)| = 0 \Rightarrow \boxed{\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\gamma_\varepsilon} f(z)dz = 0}$$

On fait de même sur le cercle C_R avec $z = R\,e^{i\theta}$. Puisque $|a^2 + z^2| \geq |z^2| - a^2 = R^2 - a^2$ et $|\ln R + i\theta| \leq |\ln R| + \theta \leq |\ln R| + \pi$, on a :

$$0 \leq |zf(z)| \leq \frac{R\sqrt{R}\left[|\ln R| + \pi\right]}{R^2 - a^2},$$

d'où

$$\lim_{R\to+\infty}\sup_{C_R}|zf(z)| = 0$$

d'où, d'après le premier lemme de Jordan :

$$\boxed{\lim_{R\to+\infty}\int_{C_R} f(z)dz = 0}$$

2.2) On applique le théorème des résidus à la fonction f sur le contour proposé :

$$\int_{AB\cup C_R^+\cup CD\cup\gamma_\varepsilon^-} f(z)dz = (2i\pi)\, res f(ia)$$

car la seule singularité située à l'intérieur du contour est $z_0 = ia$. Puisque les intégrales sur C_R et sur γ_ε tendent vers 0, lorsque $R \to +\infty$ et $\varepsilon \to 0$, on obtient par passage à la limite

$$\lim_{R\to+\infty,\varepsilon\to 0} \int_{AB} f(z)dz + 0 + \lim_{R\to+\infty,\varepsilon\to 0} \int_{CD} f(z)dz + 0 = (2i\pi)\, resf\,(ia)$$

Mais sur AB, on a d'après ce qui précède

$$f(z) = \sqrt{x}\frac{\ln x}{x^2+a^2}$$

De même, sur CD

$$f(z) = i\sqrt{-x}\frac{\ln(-x)+i\pi}{x^2+a^2}$$

On en déduit

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty} \sqrt{x}\frac{\ln x}{x^2+a^2}dx + \int_{-\infty}^0 i\sqrt{-x}\frac{\ln(-x)+i\pi}{x^2+a^2}dx &= 2i\pi\frac{\sqrt{a}}{2ia}\frac{\sqrt{2}}{2}(1+i)\left[\ln a + i\frac{\pi}{2}\right] \\ &= \frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{2}{a}}\left[\ln a - \frac{\pi}{2} + i\left(\ln a + \frac{\pi}{2}\right)\right]\end{aligned}$$

Mais en faisant le changement de variable $u = -x$ dans la seconde intégrale, on a

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^0 i\sqrt{-x}\frac{\ln(-x)+i\pi}{x^2+a^2}dx &= \int_0^{+\infty} i\sqrt{x}\frac{\ln(x)+i\pi}{x^2+a^2}dx \\ &= iI - \pi\int_0^{+\infty}\frac{\sqrt{x}}{x^2+a^2}dx\end{aligned}$$

d'où finalement

$$I + iI - \pi\int_0^{+\infty}\frac{\sqrt{x}}{x^2+a^2}dx = \frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{2}{a}}\left[\ln a - \frac{\pi}{2} + i\left(\ln a + \frac{\pi}{2}\right)\right]$$

En indentifiant les parties imaginaires, on obtient

$$\boxed{I = \tfrac{\pi}{2}\sqrt{\tfrac{2}{a}}\left(\ln a + \tfrac{\pi}{2}\right)}$$

Exercice 2

1) A x fixé, on pose $F(x,p) = TL\,[f(x,t)]$ On sait que

$$TL\,[x'(t)] = pX(p) - x(0^+)$$

donc

$$\begin{aligned}TL\left[\frac{\partial f(x,t)}{\partial t}\right] &= pF(x,p) - f(x,0^+) \\ &= pF(x,p) - 3\sin(2\pi x)\end{aligned}$$

En prenant la transformée de Laplace de l'équation différentielle (1), on obtient alors

$$\boxed{\frac{\partial^2 F(x,p)}{\partial x^2} - pF(x,p) = -3\sin(2\pi x)} \qquad (1)$$

2) On sait résoudre cette équation différentielle du second ordre à coefficients constants

$$F(x,p) = A(p)e^{\sqrt{p}x} + B(p)e^{-\sqrt{p}x} + G(x,p)$$

où $G(x,p)$ est une solution particulière de (1).

2.1) On vérifie les résultats suivants

$$\begin{aligned} G(x,p) &= C(p)\sin(2\pi x) \\ \frac{\partial^2 G(x,p)}{\partial x^2} &= -C(p)4\pi^2\sin(2\pi x) \end{aligned}$$

d'où, en remplaçant dans (1)

$$-C(p)4\pi^2\sin(2\pi x) - pC(p)\sin(2\pi x) = -3\sin(2\pi x)$$

et par suite

$$\boxed{C(p) = \frac{3}{p+4\pi^2}}$$

2) Puisque $f(0,t) = 0$, on a $F(0,p) = 0$, donc

$$A(p) + B(p) = 0$$

Puisque $f(1,t) = 0$, on a $F(1,p) = 0$ donc

$$A(p)e^{\sqrt{p}} + B(p)e^{-\sqrt{p}} = 0$$

On en déduit alors :

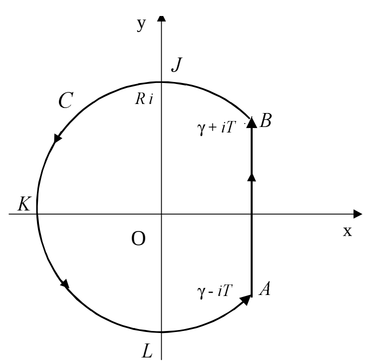
$$A(p) = B(p) = 0$$

et par suite

$$\boxed{F(x,p) = G(x,p) = \frac{3}{p+4\pi^2}\sin(2\pi x)}$$

2.3) *) $F(x,p)$ possèdant un seul pôle (simple) $p = -4\pi^2$, l'abscisse de convergence de $F(x,p)$ est $x_c = -4\pi^2$ (pour $\mathrm{Re}(p) > -4\pi^2$, $F(x,p)$ converge et pour $\mathrm{Re}(p) < -4\pi^2$, $F(x,p)$ diverge)

*) Le contour de Bromwich intervenant dans la formule d'inversion est représenté ci-dessous :



Contour de Bromwich

*) L'intégrale de $F(x,p)e^{pt}$ sur le demi cercle $JCKL$ tend vers 0 lorsque $p \to +\infty$ en vertu du deuxième lemme de Jordan (et ceci uniquement pour $t > 0$). Les intégrales sur les arcs de cercle BJ et LA tendent vers 0 lorsque $p \to +\infty$ car $F(x, \hat{p}) = \frac{N(p)}{D(p)}$ est une fraction rationnelle avec

$$\deg(N) = 0 < \deg(D) = 1$$

*) Pour $t < 0$, on ne peut déterminer $f(x,t)$ car la transformée de Laplace $F(x,p)$ est l'intégrale de $f(x,t)e^{-pt}$ lorsque t varie dans $\mathbb{R}^+$. En général, on s'intéresse à des fonctions causales et donc on a $f(x,t) = 0$ pour $t < 0$.

*) Par application du théorème des résidus sur le contour de Bromwich, on obtient

$$\begin{aligned}
f(x,t) &= \int_{D\uparrow} F(x,p)e^{pt}dp \\
&= \sum_{p_i \text{ psi de } F \text{ situé à l'intérieur de } BJCKLAB} \operatorname{res}\left\{F(x,p)e^{pt}\right\}(p_i) \\
&= \operatorname{res}\left\{F(x,p)e^{pt}\right\}(-4\pi^2) \\
&= \lim_{p \to -4\pi^2} \left(p + 4\pi^2\right) F(x,p)e^{pt} = 3\sin(2\pi x)\, e^{-4\pi^2 t}
\end{aligned}$$

Puisque ce résultat est valable pour $t > 0$

$$\boxed{f(x,t) = 3\sin(2\pi x)\, e^{-4\pi^2 t}, \qquad t > 0, x \in]0,1[}$$

Exercice 3

1) Les TZ des suites e_1 et e_2 sont définies par

$$\begin{aligned}
E_1(z) &= TZ\left[e_1(n)\right] \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty} a^n z^{-n} = \frac{1}{1 - az^{-1}} \text{ pour } \left|az^{-1}\right| < 1 \Leftrightarrow |z| > a
\end{aligned}$$

et

$$E_2(z) = TZ\left[e_1(n-m)\right] = E_1(z)z^{-m} \text{ pour } |z| > a$$

2) En prenant la TZ de l'équation (4), on obtient

$$Y(z)\left(1 - az^{-1}\right) = X(z)\left(1 - z^{-m}\right)$$

On voit donc que $Y(z)$ s'écrit $X(z)H(z)$, ce qui signifie que $y(n)$ est le résultat d'un filtrage linéaire de $x(n)$. La fonction de transfert de ce filtre est :

$$H(z) = \boxed{\frac{1 - z^{-m}}{1 - az^{-1}}}$$

On s'intéresse à des réponses impulsionnelles causales comme à la question 1). La réponse impulsionnelle de filtre est alors

$$\begin{aligned}
h(n) &= e_1(n) - e_1(n-m) \\
&= \boxed{a^n u(n) - a^{n-m} u(n-m)}
\end{aligned}$$

3) La réponse à un échelon appelée réponse indicielle est telle que

$$y(n) = u(n) * h(n) \Leftrightarrow Y(z) = U(z)H(z)$$

On sait bien que $TZ\left[u(n)\right] = \frac{1}{1-z^{-1}}$ pour $|z| > 1$, d'où

$$\begin{aligned} Y(z) &= \frac{1-z^{-m}}{1-az^{-1}}\frac{1}{1-z^{-1}} \\ &= Y_1(z) - z^{-m}Y_1(z) \end{aligned}$$

avec

$$Y_1(z) = \frac{1}{1-az^{-1}}\frac{1}{1-z^{-1}}$$

Donc si $y_1(n)$ est la suite dont la TZ est $Y_1(z)$, on a

$$y(n) = y_1(n) - y_1(n-m)$$

Il reste alors à déterminer $y_1(n)$. Une décomposition en éléments simples de $Y_1(z)$ permet d'obtenir

$$Y_1(z) = \frac{1}{1-a}\frac{1}{1-z^{-1}} - \frac{a}{1-a}\frac{1}{1-az^{-1}}$$

Donc

$$\begin{aligned} y_1(n) &= \frac{u(n)}{1-a} - \frac{a}{1-a}a^n u(n) \\ &= \frac{1-a^{n+1}}{1-a}u(n) \end{aligned}$$

On a donc finalement

$$\boxed{y(n) = \frac{1-a^{n+1}}{1-a}u(n) - \frac{1-a^{n-m+1}}{1-a}u(n-m)}$$

Barème

Exercice 1 : 7 points

1) $f_k(z) = \sqrt{\rho}e^{i\frac{\theta}{2}}e^{ik\pi}\frac{\ln\rho+i(\theta+2k\pi)}{z^2+a^2}$: 1pt

Valeur sur l'axe $]-\infty,0[$: $i\sqrt{-x}\frac{\ln(-x)+i\pi}{x^2+a^2}$: 1pt

$\mathrm{res}f(ia) = \frac{\sqrt{a}}{2ia}\frac{\sqrt{2}}{2}(1+i)\left[\ln a + i\frac{\pi}{2}\right]$: 1pt

$\mathrm{res}f(-ia) = \frac{\sqrt{a}}{-2ia}\frac{\sqrt{2}}{2}(1-i)\left[\ln a - i\frac{\pi}{2}\right]$: 1pt

2) lemmes de Jordan : 1pt + 1pt

$I = \frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{2}{a}}\left(\ln a + \frac{\pi}{2}\right)$: 1pt

Exercice 2 : 6 points

1) Equation Différentielle : 1pt

2) 2.1) $C(p) = \frac{3}{p+4\pi^2}$: 1pt

2.2) $\begin{matrix} A(p)+B(p)=0 \\ A(p)e^{\sqrt{p}}+B(p)e^{-\sqrt{p}}=0 \end{matrix}$: 1pt

2.3)$x_c = -4\pi^2$ 0.5pt

$2ème$ Lemme de Jordan : 0.5 pt

Lemme pour les arcs de cercle : 0.5 pt

$f(x,t)$ pour $t<0$: 0.5 pt

$f(x,t) = 3\sin(2\pi x)\,e^{-4\pi^2 t}, \qquad t>0, x\in\,]0,1[$: 1pt

Exercice 3 : 7 points

1) $E_1(z) = \frac{1}{1-az^{-1}}$ pour $|az^{-1}|<1 \Leftrightarrow |z|>a$:1pt

$E_2(z) = E_1(z)z^{-m}$ pour $|z|>a$:0.5pt

2)$H(z) = \boxed{\dfrac{1-z^{-m}}{1-az^{-1}}}$: 1pt

$h(n) = \boxed{a^n u(n) - a^{n-m}u(n-m)}$: 1pt

3) $Y(z) = \dfrac{1-z^{-m}}{1-az^{-1}}\frac{1}{1-z^{-1}}$: 1pt

$y(n) = y_1(n) - y_1(n-m)$: 1pt

$Y_1(z) = \frac{1}{1-a}\frac{1}{1-z^{-1}} - \frac{a}{1-a}\dfrac{1}{1-az^{-1}}$:0.5pt

$\boxed{y(n) = \frac{1-a^{n+1}}{1-a}u(n) - \frac{1-a^{n-m+1}}{1-a}u(n-m)}$:1pt