Correction Examen 8 Novembre 2002

Exercice 1

1) A x fixé, on pose $V(x,p) = TL\left[v(x,t)\right]$ et $I(x,p) = TL\left[i(x,t)\right]$. On sait que

$$TL\left[f'(t)\right] = pF(p) - f(0^+)$$

donc

$$TL\left[\frac{\partial v(x,t)}{\partial t}\right] = pV(x,p) - v(x,0^+) = pV(x,p)$$

En prenant la transformée de Laplace des équations différentielles liant la tension et le courant, on obtient

$$\begin{aligned} -\frac{\partial V(x,p)}{\partial x} &= RI(x,p) \\ -\frac{\partial I(x,p)}{\partial x} &= CpV(x,p) \end{aligned}$$

d'où l'équation

$$\frac{\partial^2 V(x,p)}{\partial x^2} - RCpV(x,p) = 0$$

On sait résoudre cette équation différentielle du second ordre à coefficients constants

$$V(x,p) = A(p)e^{\sqrt{RCp}x} + B(p)e^{-\sqrt{RCp}x}$$

2) Puisque $v(0,t) = 1$, on a $V(0,p) = \frac{1}{p}$, donc

$$A(p) + B(p) = \frac{1}{p}$$

Puisque $v(L,t) = 0$, on a $V(L,p) = 0$ donc

$$A(p)e^{\sqrt{RCp}L} + B(p)e^{-\sqrt{RCp}L} = 0$$

Quelques calculs élémentaires permettent d'obtenir

$$A(p) = \frac{e^{\tau\sqrt{p}}}{2psh\left(\tau\sqrt{p}\right)} \text{ et } B(p) = -\frac{e^{-\tau\sqrt{p}}}{2psh\left(\tau\sqrt{p}\right)} \text{ avec } \tau = L\sqrt{RC}$$

d'où

$$V(x,p) = \frac{1}{p}\frac{sh\left[\tau\sqrt{p}\left(1-\frac{x}{L}\right)\right]}{sh\left[\tau\sqrt{p}\right]}$$

3) a) Pour définir les déterminations de $\sqrt{p}$, on pose $p = re^{i(\theta+2k\pi)}$ et on obtient :

$$\sqrt{p} = p^{\frac{1}{2}} = \sqrt{r}e^{i\frac{\theta}{2}}e^{ik\pi} = (-1)^k \sqrt{r}e^{i\frac{\theta}{2}}$$

On voit donc que les déterminations correspondant à k pair ou k impair sont opposées. Puisque $sh(-x) = sh(x)$, $V(x,p)$ prend les mêmes valeurs pour toutes les déterminations de $\sqrt{p}$. De plus, supposons qu'on choisisse $\theta = 0$ sur la partie supérieure de l'axe des abscisses (notée $p = x + i0$) et $k = 0$. Lorsque $p = x + i0$, on a $\theta = 0$ et donc $\sqrt{p} = \sqrt{x}$. Sur la partie inférieure de l'axe des abscisses ($p = x - i0$), on a $\theta = 0$ et donc $\sqrt{p} = -\sqrt{x}$. Quelle que soit la détermination choisie pour $\sqrt{p}$, on a la même valeur de $V(x,p)$ au dessus et en dessous de la coupure. Donc, il n'est pas nécessaire de couper le plan complexe pour définir $V(x,p)$.

b) Les singularités isolées de $V(x,p)$ sont les racines de $sh\left[\tau\sqrt{p}\right] = 0$ et $p = 0$, c'est-à-dire

$$p = -\frac{k^2\pi^2}{\tau^2}, k \in \mathbb{N}^* \text{ et } p = 0$$

La calcul du résidu de $V(x,p)$ en $p = 0$ ne pose pas de problème :

$$\begin{aligned}\mathrm{res}V\,(0) &= \lim_{p\to 0} pV(x,p) \\ &= \lim_{p\to 0} \frac{sh\left[\tau\sqrt{p}\left(1-\frac{x}{L}\right)\right]}{sh\left[\tau\sqrt{p}\right]}\end{aligned}$$

On a

$$\begin{aligned}sh\left[\tau\sqrt{p}\left(1-\frac{x}{L}\right)\right] &= \tau\sqrt{p}\left(1-\frac{x}{L}\right) + o\left(\sqrt{p}\right) \\ sh\left[\tau\sqrt{p}\right] &= \tau\sqrt{p} + o\left(\sqrt{p}\right)\end{aligned}$$

et par suite

$$\mathrm{res}V\,(0) = \boxed{1-\frac{x}{L}}$$

Le calcul du résidu en $p = -\frac{k^2\pi^2}{\tau^2}$ peut se faire de deux manières :

- Utilisation de la formule $\frac{P\left(-\frac{k^2\pi^2}{\tau^2}\right)}{Q'\left(-\frac{k^2\pi^2}{\tau^2}\right)}$:

  En remarquant que $V(x,p) = \frac{P(x,p)}{Q(x,p)}$ avec $P(x,p) = sh\left[\tau\sqrt{p}\left(1-\frac{x}{L}\right)\right]$ et $Q(x,p) = psh\left[\tau\sqrt{p}\right]$, on a

  $$Q'(x,p) = sh\left[\tau\sqrt{p}\right] + \frac{\tau\sqrt{p}}{2}ch\left[\tau\sqrt{p}\right]$$

  obtient

  $$\mathrm{res}\ V\left(-\frac{k^2\pi^2}{\tau^2}\right) = \frac{P\left(-\frac{k^2\pi^2}{\tau^2}\right)}{Q'\left(-\frac{k^2\pi^2}{\tau^2}\right)}$$

  Avec $p = -\frac{k^2\pi^2}{\tau^2}$ et en choisissant la détermination de $\sqrt{p}$ définie précédemment, on a $\sqrt{p} = i\frac{k\pi}{\tau}$ et donc

  $$\mathrm{res}\ V\left(-\frac{k^2\pi^2}{\tau^2}\right) = \frac{sh\left[ik\pi\left(1-\frac{x}{L}\right)\right]}{sh\left[ik\pi\right] + \frac{ik\pi}{2}ch\left[ik\pi\right]}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{i\sin\left[k\pi\left(1-\frac{x}{L}\right)\right]}{0+\frac{ik\pi}{2}\cos\left[k\pi\right]} \\
&= \frac{(-1)^{k+1}\sin\left(\frac{k\pi x}{L}\right)}{\frac{k\pi}{2}(-1)^{k}} \\
&= \boxed{-\frac{2}{k\pi}\sin\left(\frac{k\pi x}{L}\right)}
\end{aligned}
$$

- Développement limité

$$\mathrm{res}V\left(-\frac{k^2\pi^2}{\tau^2}\right) = \lim_{p\to-\frac{k^2\pi^2}{\tau^2}}\left(p+\frac{k^2\pi^2}{\tau^2}\right)V(x,p)$$

En posant $u = p+\frac{k^2\pi^2}{\tau^2}$, on a

$$\mathrm{res}V\left(-\frac{k^2\pi^2}{\tau^2}\right) = \lim_{u\to 0}\frac{u}{u-\frac{k^2\pi^2}{\tau^2}}\frac{sh\left[\tau\sqrt{u-\frac{k^2\pi^2}{\tau^2}}\left(1-\frac{x}{L}\right)\right]}{sh\left[\tau\sqrt{u-\frac{k^2\pi^2}{\tau^2}}\right]}$$

On choisit la détermination de $\sqrt{p}$ telle que $\sqrt{-1}=i$. Alors

$$
\begin{aligned}
\tau\sqrt{u-\frac{k^2\pi^2}{\tau^2}} &= \tau i\frac{k\pi}{\tau}\sqrt{1-\frac{u}{\frac{k^2\pi^2}{\tau^2}}} \\
&= ik\pi\left(1-\frac{u\tau^2}{2k^2\pi^2}+o(u)\right)
\end{aligned}
$$

Donc

$$
\begin{aligned}
sh\left[\tau\sqrt{u-\frac{k^2\pi^2}{\tau^2}}\right] &= \frac{1}{2}\left[e^{ik\pi\left(1-\frac{u\tau^2}{2k^2\pi^2}+o(u)\right)}-e^{-ik\pi\left(1-\frac{u\tau^2}{2k^2\pi^2}+o(u)\right)}\right] \\
&= i\sin\left[k\pi\left(1-\frac{u\tau^2}{2k^2\pi^2}+o(u)\right)\right]
\end{aligned}
$$

Mais $\sin(k\pi-v) = (-1)^{k+1}\sin(v)$, donc

$$sh\left[\tau\sqrt{u-\frac{k^2\pi^2}{\tau^2}}\right] = i(-1)^{k+1}\sin\left[k\pi\left(\frac{u\tau^2}{2k^2\pi^2}+o(u)\right)\right]$$

Il vient alors

$$\frac{u}{sh\left[\tau\sqrt{u-\frac{k^2\pi^2}{\tau^2}}\right]} \underset{u\to 0}{\rightarrow} \boxed{\frac{1}{i}\frac{2k^2\pi^2}{k\pi\tau^2}(-1)^{k+1}}$$

Par ailleurs

$$\lim_{u\to 0} sh\left[\tau\sqrt{u-\frac{k^2\pi^2}{\tau^2}}\left(1-\frac{x}{L}\right)\right] = sh\left[\tau\sqrt{-\frac{k^2\pi^2}{\tau^2}}\left(1-\frac{x}{L}\right)\right]$$

$$
\begin{aligned}
&= sh\left[i\tau\frac{k\pi}{\tau}\left(1-\frac{x}{L}\right)\right] \\
&= i\sin\left[k\pi\left(1-\frac{x}{L}\right)\right] \\
&= \boxed{i\sin\left[k\pi\tfrac{x}{L}\right](-1)^{k+1}}
\end{aligned}
$$

En regroupant les différents termes, on obtient

$$\mathrm{res}V\left(-\frac{k^2\pi^2}{\tau^2}\right)=\boxed{-\tfrac{2}{k\pi}\sin\left(\tfrac{k\pi x}{L}\right)}$$

En posant $G(p)=V(x,p)e^{pt}$, on a

$$\mathrm{res}G\left(-\frac{k^2\pi^2}{\tau^2}\right)=-\frac{2}{k\pi}\sin\left(\frac{k\pi x}{L}\right)e^{-\frac{k^2\pi^2t^2}{\tau^2}}$$

c) En admettant que les intégrales définies sur les parties circulaires du contour de Bromwich tendent vers 0 lorsque le rayon $R\to\infty$, on obtient en appliquant la formule d'inversion à $V(x,p)$:

$$v(x,t)=1-\frac{x}{L}-\sum_{k=1}^{\infty}\frac{2}{k\pi}e^{-\frac{k^2\pi^2t^2}{\tau^2}}\sin\left(\frac{k\pi x}{L}\right)$$

d) En utilisant $v(x,0)=0$, on obtient :

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}\sin\left(\frac{k\pi x}{L}\right)=\frac{\pi}{2}\left(1-\frac{x}{L}\right)$$

Exercice 2

1) On pose $z=e^{i\theta}$ et par suite

$$\boxed{\cos\theta=\frac{z+\frac{1}{z}}{2}},\qquad \boxed{\sin\theta=\frac{z-\frac{1}{z}}{2i}}$$

et $dz=ie^{i\theta}d\theta=izd\theta$ d'où

$$I(a)=\int_{C(0,1)}f(z)dz$$

avec

$$
\begin{aligned}
f(z) &= \frac{\left(\frac{z-\frac{1}{z}}{2i}\right)^2}{1-2a\left(\frac{z+\frac{1}{z}}{2}\right)+a^2}\frac{1}{iz} \\
&= \frac{\left(z^2-1\right)^2}{4iz^2\left(az^2-(1+a^2)z+a\right)} \\
&= \boxed{\frac{\left(z^2-1\right)^2}{4iaz^2\left(z-a\right)\left(z-\frac{1}{a}\right)}}
\end{aligned}
$$

2) La fonction f possède donc deux pôles simples $z = a, z = \frac{1}{a}$ et un pôle double $z = 0$. Les résidus aux pôles simples se calculent facilement :

$$\begin{aligned} \mathrm{res}f(a) &= \lim_{z \to a} (z - a) f(z) = \boxed{\frac{a^2 - 1}{4ia^2}} \\ \mathrm{res}f\left(\frac{1}{a}\right) &= \lim_{z \to a} \left(z - \frac{1}{a}\right) f(z) = \boxed{\frac{1 - a^2}{4ia^2}} \end{aligned}$$

Pour le pôle double $z = 0$, on a $\mathrm{res}f(0) = \varphi'(0)$ avec $\varphi(z) = z^2 f(z)$. Des calculs élémentaires permettent d'obtenir

$$\varphi'(z) = \frac{4z\left(z^2 - 1\right) 4ia (z - a)\left(z - \frac{1}{a}\right) - \left(z^2 - 1\right)^2 4i\left(2az - (1 + a^2)\right)}{\left[4i\left(az^2 - (1 + a^2)z + a\right)\right]^2}$$

d'où

$$\mathrm{res}f(0) = \varphi'(0) = \boxed{\frac{1 + a^2}{4ia^2}}$$

3) Pour $|a| < 1$, il y a deux singularités à l'intérieur du cercle unité $z = a$ et $z = 0$. Le théorème des résidus nous permet d'obtenir :

$$I(a) = (2i\pi)\left[\mathrm{res}f(0) + \mathrm{res}f(a)\right] = \boxed{\pi}$$

Pour $|a| > 1$, il y a deux singularités à l'intérieur du cercle unité $z = 1/a$ et $z = 0$. Le théorème des résidus nous permet d'obtenir :

$$I(a) = (2i\pi)\left[\mathrm{res}f(0) + \mathrm{res}f(1/a)\right] = \boxed{\frac{\pi}{a^2}}$$

Exercice 3

1) a) On a

$$y_1(n) = x(n - 1) + ... + x(n - L)$$

donc, d'après le théorème du retard,

$$Y_1(z) = X(z)z^{-1} + ... + X(z)z^{-L} = X(z)\left[z^{-1} + ... + z^{-L}\right]$$

On voit donc que $Y_1(z)$ s'écrit $X(z)H(z)$, ce qui signifie que $y_1(n)$ est le résultat d'un filtrage linéaire de $x(n)$. La fonction de transfert de ce filtre est :

$$H(z) = z^{-1} + ... + z^{-L} = \boxed{z^{-1}\frac{1 - z^{-L}}{1 - z^{-1}}}$$

La réponse impulsionnelle du filtre est

$$\begin{aligned} h(n) &= TZ^{-1}\left[H(z)\right] = TZ^{-1}\left[z^{-1} + ... + z^{-L}\right] \\ &= \boxed{\delta(n - 1) + ... + \delta(n - L)} \end{aligned}$$

b) La transformée en Z du signal $s_1(n)$ est

$$S_1(z) = \sum_{i=1}^{L} iz^{-i} + \sum_{i=L+1}^{+\infty} Lz^{-i}$$

Or, en dérivant

$$1+x+x^2+...+x^L=\frac{1-x^{L+1}}{1-x},$$

on obtient

$$1+2x+...+Lx^{L-1}=\frac{-\left(L+1\right)x^L\left(1-x\right)+1-x^{L+1}}{\left(1-x\right)^2}$$

d'où en multipliant tout par x et en posant $x=z^{-1}$

$$\sum_{i=1}^{L}iz^{-i}=z^{-1}\frac{-\left(L+1\right)z^{-L}\left(1-z^{-1}\right)+1-z^{-(L+1)}}{\left(1-z^{-1}\right)^2}$$

Par ailleurs

$$\sum_{i=L+1}^{+\infty}Lz^{-i}=Lz^{-(L+1)}\frac{1}{1-z^{-1}}\text{ pour }\left|z^{-1}\right|<1$$

En regroupant les expressions des deux sommes $\sum_{i=1}^{L}iz^{-i}$ et $\sum_{i=L+1}^{+\infty}Lz^{-i}$, on obtient :

$$\boxed{S_1(z)=\frac{z^{-1}(1-z^{-L})}{(1-z^{-1})^2}}$$

c) Lorsque $x(n)=u(n)$, on a

$$\begin{aligned}Y(z)&=H(z)U(z)\\&=z^{-1}\frac{1-z^{-L}}{1-z^{-1}}\frac{1}{1-z^{-1}}\\&=S_1(z)\end{aligned}$$

La réponse indicielle du filtre est donc le signal $s_1(n)$ représenté ci-dessous pour $L=5$:

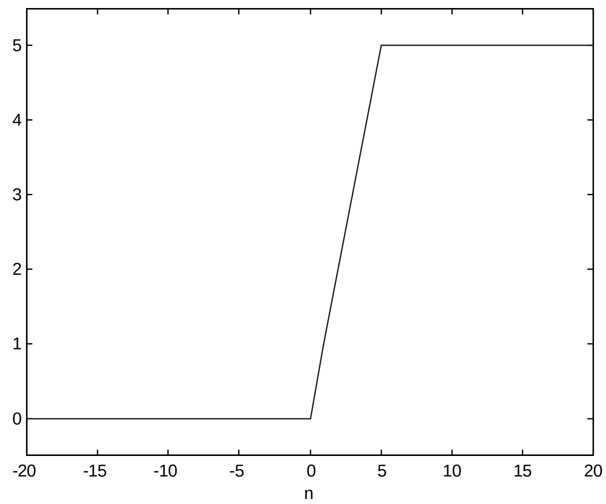

Figure 1 : Réponse Indicielle du système 1

2) La réponse indicielle du $2^{ème}$ système s'écrit

$$u(n+1)+...+u(n+L)=\begin{cases} 0 \text{ si } n<-L \\ L+n+1 \text{ si } n\in\{-L,...,-1\} \\ L \text{ si } n\geq 0 \end{cases}$$

et est représentée ci-dessous pour $L=5$:

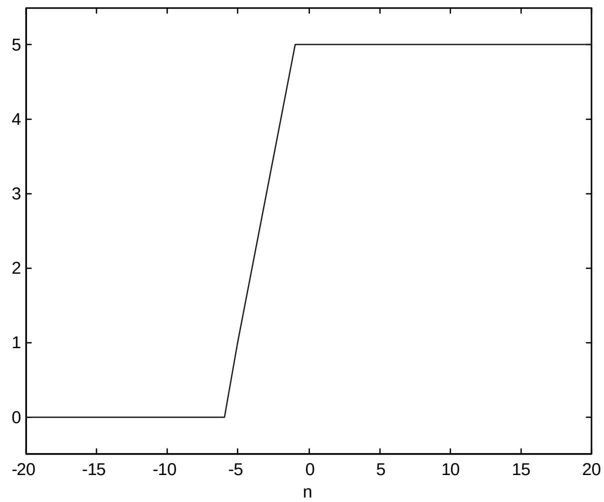

Figure 2 : Réponse Indicielle du système 2

3) La réponse indicielle de cette opération est la différence entre les réponses déterminées aux questions 1) et 2) représentée ci dessous :

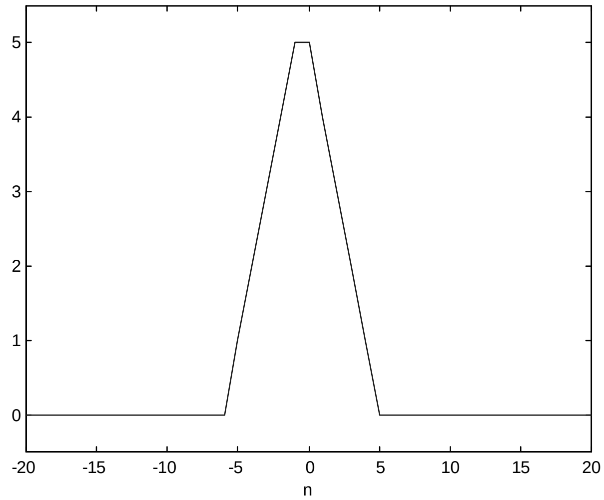

Figure 3 : Réponse Indicielle du système 3

On voit donc qu'un pic apparait à l'instant de la discontinuité. Ce filtre permet de déterminer les ruptures dans un signal. Les applications sont diverses et variées : détection de contours en traitement d'images, détection de défaillances, ... L'effet du filtre sur le signal de l'énoncé est illustré ci-dessous :

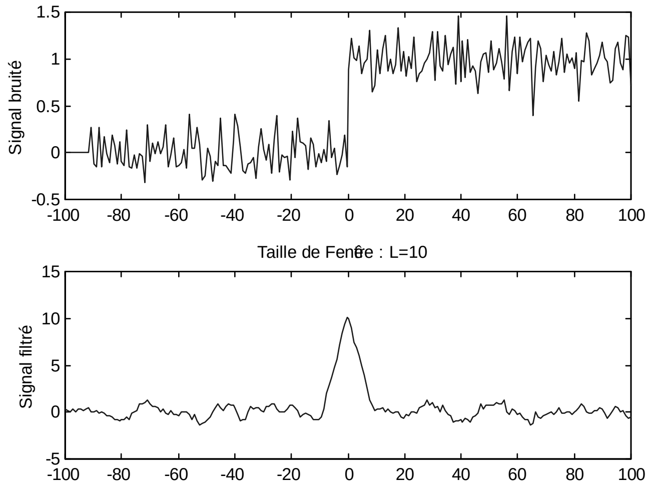

Figure 3. Détection de rupture