Examen Lundi 24 Novembre 2003

Exercice 1

On considère l'équation différentielle suivante

$$x\frac{\partial f(x,t)}{\partial t}+\frac{\partial f(x,t)}{\partial x}=x^3 \qquad t>0, x>0 \tag{1}$$

1) La transformée de Laplace de l'équation (1) à x fixé s'écrit

$$x\left[pF(x,p)-f(x,0)\right]+\frac{dF(x,p)}{dx}=x^3TL\left[u(t)\right]$$

où $u(t)$ est l'échelon de Heaviside. En prenant en compte la condition initiale $f(x,0)=0$, on obtient

$$\boxed{pxF(x,p)+\frac{dF(x,p)}{dx}=\frac{x^3}{p}} \qquad x>0 \tag{2}$$

2.1) L'équation sans second membre s'écrit

$$\begin{aligned} pxF(x,p)+\frac{dF(x,p)}{dx} &= 0 \Leftrightarrow \frac{\frac{dF(x,p)}{dx}}{F(x,p)}=-px \\ &\Leftrightarrow \ln\left[F(x,p)\right]=-p\frac{x^2}{2}+K(p) \end{aligned}$$

où $K(p)$ est une constante (qui dépend du paramètre fixé p). On en conclut

$$\boxed{F_1(x,p)=C(p)e^{-p\frac{x^2}{2}}}$$

2.2) On remplace $F_2(x,p)=A_0(p)+A_1(p)x+A_2(p)x^2$ dans (2) et on obtient

$$px\left[A_0(p)+A_1(p)x+A_2(p)x^2\right]+A_1(p)+2A_2(p)x=\frac{x^3}{p}$$

d'où après identification

$$A_1(p)=0, A_2(p)=\frac{1}{p^2} \text{ et } A_0(p)=-\frac{2}{p^3}$$

On en conclut

$$\boxed{F_2(x,p)=\frac{px^2-2}{p^3}}$$

La forme générale des solutions de (**??**) est donc

$$\boxed{F(x,p)=C(p)e^{-p\frac{x^2}{2}}+\frac{px^2-2}{p^3}}$$

2.3) En prenant la transformée de Laplace de la condition limite $f(0,t)=0$ (qui est valable $\forall t>0$), on obtient

$$F(0,p)=0$$

d'où

$$C(p)-\frac{2}{p^3}=0\Rightarrow \boxed{C(p)=\tfrac{2}{p^3}}$$

ce qui donne la solution attendue.
2.4) Les tables des transformées de Laplace donnent

$$\begin{aligned} TL^{-1}\left[\frac{1}{p^2}\right] &= tu(t)\\ TL^{-1}\left[\frac{1}{p^3}\right] &= \frac{1}{2}t^2u(t) \end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned} TL^{-1}\left[\frac{px^2-2}{p^3}\right] &= x^2tu(t)-2\left(\frac{1}{2}t^2u(t)\right)\\ &= \left(x^2t-t^2\right)u(t) \end{aligned}$$

Par ailleurs,

$$TL^{-1}\left[\frac{2}{p^3}\right]=t^2u(t)\Rightarrow TL^{-1}\left[\frac{2}{p^3}e^{-\frac{x^2}{2}p}\right]=\left(t-\frac{x^2}{2}\right)^2u\left(t-\frac{x^2}{2}\right)$$

Finalement

$$\boxed{f(x,t)=\left(tx^2-t^2\right)u(t)+\left(t-\tfrac{x^2}{2}\right)^2u\left(t-\tfrac{x^2}{2}\right)}$$

2.5)

- La seule singularité de $F(x,p)$ est $p=0$ donc l'abscisse de convergence de $F(x,p)$ est $x_c=0$. Le contour de Bromwich est donné dans le cours
- La formule d'inversion de la transformée de Laplace donne

$$\begin{aligned} f(x,t)u(t) &= \frac{1}{2i\pi}\int_D F(x,p)e^{pt}dp\\ &= \frac{1}{2i\pi}\int_D\left[\frac{2}{p^3}e^{-p\frac{x^2}{2}}+\frac{px^2-2}{p^3}\right]e^{pt}dp\\ &= \frac{1}{2i\pi}\int_D\frac{2}{p^3}e^{p\left(t-\frac{x^2}{2}\right)}dp+\frac{1}{2i\pi}\int_D\frac{px^2-2}{p^3}e^{pt}dp \end{aligned}$$

  Le second membre se calcule facilement

$$\frac{1}{2i\pi}\int_D\frac{px^2-2}{p^3}e^{pt}dp=\text{res}\left[\frac{px^2-2}{p^3}e^{pt}\right]_{p=0}$$

Le développement de Laurent de $\frac{px^2-2}{p^3}e^{pt}$ s'écrit

$$\frac{px^2-2}{p^3}e^{pt} = \left\{\frac{x^2}{p^2} - \frac{2}{p^3}\right\}\left\{1 + pt + \frac{p^2}{2}t^2 + ...\right\}$$

Le coefficient en $\frac{1}{p}$ de ce développement est le résidu d'où

$$\text{res}\left[\frac{px^2-2}{p^3}e^{pt}\right]_{p=0} = x^2t - t^2$$

c'est-à-dire

$$\frac{1}{2i\pi}\int_D \frac{px^2-2}{p^3}e^{pt}dp = x^2t - t^2, \qquad t > 0$$

Il est important de noter que ce dernier résultat n'est valable que pour $t > 0$ car dans le cas contraire, on ne peut appliquer le $2^{ème}$ lemme de Jordan sur le contour circulaire.

- Pour calculer le premier membre, on pose

$$g(t) = \frac{1}{2i\pi}\int_D \frac{2}{p^3}e^{pt}dp$$

qui se calcule facilement pour $t > 0$:

$$\begin{aligned} g(t) &= \text{res}\left[\frac{2}{p^3}e^{pt}\right]_{p=0} \\ &= t^2, \qquad t > 0 \end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned} g\left(t - \frac{x^2}{2}\right) &= \frac{1}{2i\pi}\int_D \frac{2}{p^3}e^{p\left(t-\frac{x^2}{2}\right)}dp \\ &= \left(t - \frac{x^2}{2}\right)^2, \qquad t - \frac{x^2}{2} > 0 \\ &= \left(t - \frac{x^2}{2}\right)^2, \qquad t > \frac{x^2}{2} \end{aligned}$$

On retrouve donc le même résultat qu'à la question (2.4).

$\boxed{\textbf{Exercice 2}}$

1) On a

$$X_a(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1)\, a^n z^{-n}$$

En dérivant les deux membres de l'égalité

$$\sum_{n=0}^{+\infty} x^{n+1} = \frac{x}{1-x} \qquad |x| < 1$$

on obtient

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (n+1)\, x^n = \frac{1}{(1-x)^2} \qquad |x| < 1$$

d'où

$$X_a(z) = \frac{1}{\left(1 - az^{-1}\right)^2} \qquad |z| > |a|$$

2) On a

$$\begin{aligned}
Y_a(z) &= \sum_{n=-\infty}^{-1} -(n+1)\, a^n z^{-n} \\
&= \sum_{n=-\infty}^{-2} -(n+1)\, a^n z^{-n} \\
&= \sum_{p=0}^{+\infty} (p+1)\left(a^{-1}z\right)^{p+2} \quad \text{(changement de variables } p = -(n+2)\text{)} \\
&= \left(a^{-1}z\right)^2 \frac{1}{\left(1 - a^{-1}z\right)^2} \qquad |z| < |a| \\
&= \frac{1}{\left(1 - az^{-1}\right)^2} \qquad |z| < |a|
\end{aligned}$$

On voit donc que les TZ des signaux $x_a(n)$ et $y_a(n)$ ont des expressions analytiques identiques. Cependant, elles diffèrent par leur région de convergence.

3) La fonction de transfertm $H(z)$ se décompose comme suit :

$$\begin{aligned}
H(z) &= \frac{1}{\left(1 - bz^{-1}\right)^2\left(1 - az^{-1}\right)^2} \\
&= \frac{b}{b-a}\frac{1}{\left(1 - bz^{-1}\right)^2} + \frac{a}{a-b}\frac{1}{\left(1 - az^{-1}\right)^2}
\end{aligned}$$

Donc

$$h(n) = \frac{b}{b-a} TZ^{-1}\left[\frac{1}{\left(1 - bz^{-1}\right)^2}\right] + \frac{a}{a-b} TZ^{-1}\left[\frac{1}{\left(1 - az^{-1}\right)^2}\right]$$

Les trois cas proposés diffèrent par le domaine de convergence de $H(z)$. Ce domaine impose la forme de $h(n)$.

- Cas 1) la région de convergence de $H(z)$ est $|z| < a$

$$\begin{aligned} h(n) &= \frac{b}{b-a}\left[-(n+1)\, b^n u(-n-1)\right] + \frac{a}{a-b}\left[-(n+1)\, a^n u(-n-1)\right] \\ &= (n+1)\, \frac{b^{n+1} - a^{n+1}}{a-b} u(-n-1) \end{aligned}$$

- Cas 2) la région de convergence de $H(z)$ est $a < |z| < b$

$$\begin{aligned} h(n) &= \frac{b}{b-a}\left[-(n+1)\, b^n u(-n-1)\right] + \frac{a}{a-b}\left[(n+1) a^n u(n)\right] \\ &= (n+1)\, \frac{a^{n+1}u(n) + b^{n+1}u(-n-1)}{a-b} \end{aligned}$$

- Cas 3) la région de convergence de $H(z)$ est $|z| > b$

$$\begin{aligned} h(n) &= \frac{b}{b-a}\left[(n+1) b^n u(n)\right] + \frac{a}{a-b}\left[(n+1) a^n u(n)\right] \\ &= (n+1) \frac{b^{n+1} - a^{n+1}}{b-a} u(n) \end{aligned}$$

Exercice 3

1) La fonction $f\varphi$ admet deux pôles simples $\boxed{z = \pm ia}$ provenant du dénominateur de f et une infinité de pôles simples $\boxed{z = k, k \in \mathbb{Z}}$ dus au dénominateur de φ.
2) Les résidus se calculent simplement comme suit

$$\begin{aligned} \text{res} f\varphi\,(ia) &= \varphi\,(ia)\,\text{res} f\,(ia) = \varphi\,(ia)\,\frac{P(ia)}{Q'(ia)} \\ &= \frac{2i\pi}{e^{i\pi(ia)} - e^{-i\pi(ia)}} \frac{iae^{i(ia)\theta}}{2ia} \\ &= \frac{i\pi e^{-a\theta}}{e^{-a\pi} - e^{a\pi}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{res} f\varphi\,(-ia) &= \varphi\,(-ia)\,\text{res} f\,(-ia) = \varphi\,(ia)\,\frac{P(-ia)}{Q'(-ia)} \\ &= \frac{2i\pi}{e^{i\pi(-ia)} - e^{-i\pi(-ia)}} \frac{-iae^{i(-ia)\theta}}{-2ia} \\ &= \frac{i\pi e^{a\theta}}{e^{a\pi} - e^{-a\pi}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{res} f\varphi\,(k) &= f\,(k)\,\text{res}\varphi\,(k) = f\,(k)\,\frac{P\,(k)}{Q'\,(k)} \\ &= \frac{ke^{ik\theta}}{k^2 + a^2} \frac{\pi}{\pi \cos(k\pi)} \\ &= \frac{ke^{ik\theta}}{k^2 + a^2} (-1)^k \end{aligned}$$

3) Le théorème des résidus appliqué à la fonction $f\varphi$ sur le contour C_n (défini par $|z| = n + \frac{1}{2}$) s'écrit :

$$\int_{C_n} f(\theta)\varphi(\theta)\,d\theta = (2i\pi)\left[\operatorname{res} f\varphi(ia) + \operatorname{res} f\varphi(ia) + \sum_{k=-n}^{+n} \operatorname{res} f\varphi(k)\right] \tag{3}$$

4) On décompose l'intégrale $\int_{C_n} f(\theta)\varphi(\theta)\,d\theta$ comme suit

$$\begin{aligned}
\int_{C_n} f(\theta)\varphi(\theta)\,d\theta &= \int_{C_n^+} \frac{ze^{iz\theta}}{z^2+a^2}\frac{2i\pi}{e^{i\pi z}-e^{-i\pi z}}dz + \int_{C_n^-} \frac{ze^{iz\theta}}{z^2+a^2}\frac{2i\pi}{e^{i\pi z}-e^{-i\pi z}}dz \\
&= \int_{C_n^+} \frac{ze^{iz\theta}}{z^2+a^2}\frac{e^{i\pi z}2i\pi}{e^{2i\pi z}-1}dz + \int_{C_n^-} \frac{ze^{iz\theta}}{z^2+a^2}\frac{2i\pi e^{-i\pi z}}{1-e^{-2i\pi z}}dz \\
&= I_1 + I_2
\end{aligned}$$

On a vu en cours que la fonction $\frac{1}{e^{2i\pi z}-1}$ était bornée sur C_n^+. De plus, on a un point z de C_n^+ s'écrit $z = Re^{i\phi}$ avec $\phi \in [0,\pi]$, d'où

$$\left|\frac{z}{z^2+a^2}\right| \le \frac{R}{R^2-a^2}$$

(en effet $|z^2+a^2| \ge |z^2| - |a^2| = R^2 - a^2$) ce qui implique

$$\sup_{C_n^+}\left|\frac{z}{z^2+a^2}\right| \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$

D'après le $2^{ème}$ lemme de Jordan, la première intégrale I_1 tend vers 0 lorsque $n \to +\infty$ si $\theta + \pi > 0$, c'est-à-dire

$$\boxed{\theta > -\pi}$$

On fait de même pour l'intégrale I_2 et on obtient

$$I_2 \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0 \text{ si } \theta - \pi < 0,$$

c'est-à-dire

$$\boxed{\theta < \pi}$$

Le domaine D_θ recherché est donc

$$\boxed{D_\theta = \left]-\pi, +\pi\right[}$$

5) Lorsque $\theta \in D_\theta$, en faisant tendre n vers $+\infty$ dans (3), on obtient :

$$\begin{aligned}
0 &= \operatorname{res} f\varphi(ia) + \operatorname{res} f\varphi(ia) + \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \operatorname{res} f\varphi(k) \\
&= \frac{i\pi e^{-a\theta}}{e^{-a\pi}-e^{a\pi}} + \frac{i\pi e^{a\theta}}{e^{a\pi}-e^{-a\pi}} + \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{ke^{ik\theta}}{k^2+a^2}(-1)^k
\end{aligned}$$

c'est-à-dire

$$\begin{aligned}
\frac{i\pi 2sh(a\theta)}{2sh(a\pi)} &= \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{ke^{ik\theta}-ke^{-ik\theta}}{k^2+a^2}(-1)^k \\
i\pi\frac{sh(a\theta)}{sh(a\pi)} &= 2i\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{k\sin(k\theta)}{k^2+a^2}(-1)^k
\end{aligned}$$

d'où

$$S(\theta) = \frac{\pi}{2} \frac{sh(a\theta)}{sh(a\pi)}, \qquad \theta \in]-\pi, +\pi[$$

6) Lorsque $\theta \notin D_\theta$, on peut calculer $S(\theta) = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{n \sin(n\theta)}{n^2+a^2}$ en remarquant que cette fonction est périodique de période 2π. Par exemple, pour $\theta \in]\pi, 3\pi[$, on a $\theta - \pi \in D_\theta$ et donc

$$S(\theta) = \frac{\pi}{2} \frac{sh(a(\theta - \pi))}{sh(a\pi)}, \qquad \theta \in]\pi, 3\pi[$$