Partiel de Variable Complexe

Jeudi 7 mars 2002, 8h00-10h00

Partiel avec documents (Les trois exercices sont indépendants).

Exercice 1

Le but de cet exercice est de déterminer

$$I = \int_2^{+\infty} \frac{x \ln(x-2)}{(1+x)^3} dx$$

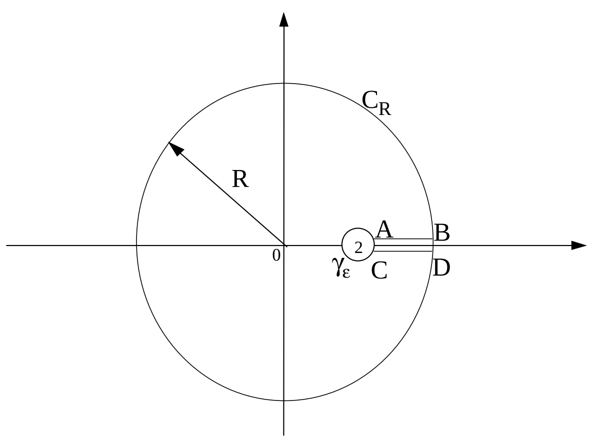
1) Définir la détermination de $f(z) = z\left[\log(z-2)\right]^2$ qui prend des valeurs réelles sur le bord supérieur de la coupure $[2, +\infty[$. Déterminer ensuite les valeurs de cette détermination sur le bord inférieur de la coupure.

2) Déterminer le résidu de la fonction

$$g(z) = \frac{f(z)}{(1+z)^3}$$

au point $z = -1$ que l'on notera res$g(-1)$.

3) Appliquer la théorème des résidus à la fonction g sur le contour $AB \cup C_R \cup DC \cup \gamma_\varepsilon$:



Démontrer avec soin que les intégrales de g sur les contours circulaires C_R et γ_ε tendent vers 0, lorsque $R \to +\infty$ et $\varepsilon \to 0$ respectivement. En déduire la valeur de l'intégrale I recherchée ainsi que celle de

$$J = \int_2^{+\infty} \frac{x}{(1+x)^3} dx$$

Exercice 2

Soit l'équation différentielle

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial x} = 2\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} + u(x,t) \text{ pour } t > 0, x > 0$$

avec la condition initiale $u(x,0) = 6e^{-3x}$, $x > 0$ et la condition limite $u(0,t) = 6e^{-2t}$, $t > 0$.

1) Donner l'équation différentielle vérifiée par $U(x,p) = TL\,[u(x,t)]$.

2) On pose $F(x,p) = U(x,p)e^{-(2p+1)x}$. Montrer que

$$\frac{\partial F(x,p)}{\partial x} = -12e^{-(2p+4)x} \qquad x > 0$$

En déduire $F(x,p)$ à une fonction additive $C(p)$ près. Déterminer alors $U(x,p)$ en utilisant la condition limite.

3) Appliquer la formule d'inversion à l'expression de $U(x,p)$ déterminée à la question précédente et en déduire $u(x,t)$ pour $x > 0$, $t > 0$.

Exercice 3

On considère l'opération dite de "moyenne glissante" appliquée au signal discret $x(n)$:

$$y(n) = \frac{1}{n_0}\sum_{k=n-n_0}^{n} x(k)$$

où n_0 est un entier positif fixé.

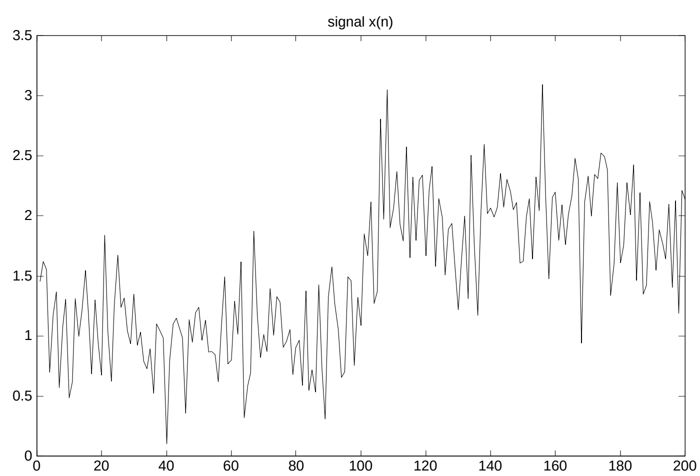
1) Montrer que $y(n)$ est la sortie d'un filtre linéaire dont on précisera la réponse impulsionnelle $h(n)$ et la fonction de transfert $H(z) = TZ\,[h(n)]$.

2) Déterminer $Y(z)$ lorsque $x(n) = a^n u(n)$, avec $|a| < 1$ et

$$u(n) = \begin{cases} 1 \text{ si } n \geq 0 \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$$

En appliquant la formule d'inversion à l'expression de $Y(z)$ trouvée ci-dessus, déterminer $y(n)$ pour $n \geq n_0$. Peut-on trouver ce résultat plus simplement ?

3) On applique le filtre précédent au signal $x(n)$ suivant :



Expliquer qualitativement l'effet du filtre à "moyenne glissante" sur le signal $x(n)$. Avez-vous une idée d'une application ou pourrait être utilisé ce filtre ?