Examen de Variable Complexe

Mercredi 12 Mars de 8h à 10h

Exercice 1

On considère la fonction de la variable complexe définie par

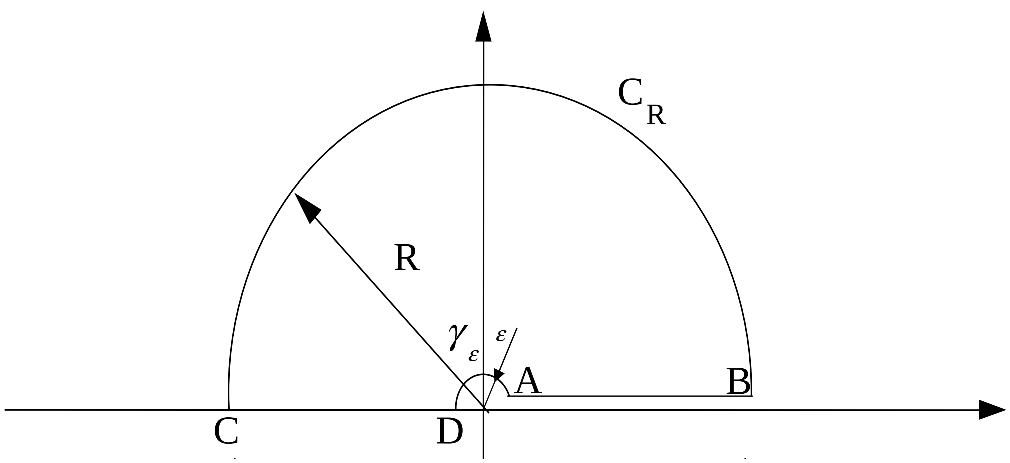
$$f(z) = \frac{\sqrt{z}\log z}{z^2 + a^2}, \; a > 0$$

1) Donner la forme générale des déterminations de $f(z)$ définies dans $\mathbb{C} \setminus [0, +\infty[$. Définir la détermination de f qui vaut

$$\frac{\sqrt{x}\ln x}{x^2 + a^2}$$

sur le bord supérieur de la coupure noté AB. Calculer la valeur de cette détermination sur l'axe $]-\infty, 0[$ ainsi que la valeur du résidu de f au point $z = ia$.

2) On considère le contour suivant



2.1) Etudier $\lim_{\varepsilon \to 0} K_\varepsilon$ et $\lim_{R \to +\infty} J_R$ avec

$$K_\varepsilon = \int_{\gamma_\varepsilon} f(z)dz \text{ et } J_R = \int_{C_R} f(z)dz$$

2.2) En déduire la valeur de l'intégrale suivante :

$$I = \int_0^{+\infty} \frac{\sqrt{x}\ln x}{x^2 + a^2} dx$$

Exercice 2

On considère l'équation différentielle

$$\frac{\partial f(x,t)}{\partial t} = \frac{\partial^2 f(x,t)}{\partial x^2} \qquad t > 0, x \in \left]0,1\right[\tag{1}$$

avec les conditions initiale et limites suivantes

$$f(x,0) = 3\sin(2\pi x)\,,\; f(0,t) = 0,\; f(1,t) = 0 \tag{2}$$

1) Montrer que la transformée de Laplace de l'équation précédente s'écrit

$$\frac{d^2F(x,p)}{dx^2} - pF(x,p) = -3\sin(2\pi x) \tag{3}$$

où $F(x,p) = TL\left[f(x,t)\right]$ (calculé à x fixé).
2) On considère dans ce qui suit p comme un paramètre. Il est bien connu (et on l'admettra) que la solution générale de l'équation différentielle du second ordre à coefficients constants (3) est

$$F(x,p) = A(p)e^{\sqrt{p}x} + B(p)e^{-\sqrt{p}x} + G(x,p)$$

où $G(x,p)$ est une solution particulière de (3).
2.1) Déterminer la fonction $C(p)$ telle que $G(x,p) = C(p)\sin(2\pi x)$ soit une solution de (3).
2.2) En utilisant les conditions $f(0,t) = 0$ et $f(1,t) = 0$, donner un système d'équations vérifié par $A(p)$ et $B(p)$. En déduire $A(p)$ et $B(p)$, puis la solution générale $F(x,p)$ de (1) avec les conditions (2).
2.3) On désire appliquer la formule d'inversion de la transformée de Laplace pour déterminer $f(x,t)$. Quel est l'abscisse de convergence de $F(x,p)$? Représenter le contour de Bromwich intervenant dans la formule d'inversion de $F(x,p)$. Expliquer pourquoi les parties définies sur les arcs de cercle tendent vers 0 lorque le rayon de ces arcs de cercle $R \to \infty$ et $t > 0$. Que donne la formule d'inversion pour $t < 0$? En utilisant les résultats précédents, retrouver l'expression classique de $f(x,t)$ dont la transformée de Laplace est $F(x,p)$.

Exercice 3

1) Soit $u(n)$ l'échelon de Heaviside défini par :

$$u(n) = \begin{cases} 1 \text{ si } n \geq 0 \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$$

et soit a un réel tel que $a \in \left]0,+1\right[$. Déterminer les transformée en Z des signaux suivants

$$e_1(n) = a^n u(n) \text{ et } e_2(n) = e_1(n-m), \quad m > 0$$

notées $E_1(z) = TZ\left[e_1(n)\right]$ et $E_2(z) = TZ\left[e_2(n)\right]$. Préciser les valeurs de z pour lesquelles $E_1(z)$ et $E_2(z)$ sont définies.
2) On considère l'équation récurrente

$$y(n) - ay(n-1) = x(n) - x(n-m), \quad m > 0 \tag{4}$$

modélisant un système d'entrée $x(n)$ et de sortie $y(n)$. Déterminer la fonction de transfert (appelée aussi transmittance) $H(z)$ de ce système. En utilisant les résultats de la question 1), déterminer la réponse impulsionnelle causale associée à $H(z)$.
3) Déterminer la sortie du système (4), lorsque l'entrée est $x(n) = u(n)$ et $h(n)$ est définie comme dans la questoin 2).

Rappels

Fonction	TL
$f(t)$	$F(p)$
$(-1)^n t^n f(t)$	$\frac{d^n}{dp^n} F(p)$
$f^{(n)}(t)$	$p^n F(p) - p^{n-1} f(0^+) - ... - f^{(n-1)}(0^+)$
$\int_0^t f(u)du$	$\frac{F(p)}{p}$
$\frac{f(t)}{t}$	$\int_p^{\infty} F(p)dp$
$e^{at} f(t)$	$F(p-a)$
$f(t-a)U(t-a)$	$e^{-ap} F(p)$
$f\left(\frac{t}{k}\right)$	$kF(kp)$
$\int_0^t f(u)g(t-u)du$	$F(p)G(p)$

Fonction	TZ
$f(n)$	$F(z)$
$f(n-n_0)$	$z^{-n_0} F(z)$
$a^n f(n)$	$F\left(\frac{z}{a}\right)$
$nf(n)$	$-z \frac{dF(z)}{dz}$
$f(n) * g(n) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} f(k)g(n-k)$	$F(z)G(z)$