Partiel de Variable Complexe

Vendredi 8 novembre 2002, 08h00-10h00

Exercice 1

On considère le système d'équations aux dérivées partielles suivant, qui régit les valeurs de la tension et du courant pour un cable de téléphonie "idéal" :

$$\begin{aligned} -\frac{\partial v}{\partial x}(x,t) &= Ri(x,t) \\ -\frac{\partial i}{\partial x}(x,t) &= C\frac{\partial v}{\partial t}(x,t) \end{aligned}$$

pour $t > 0$ et $x \in]0, L[$, avec les conditions initiales (CI) et les conditions limites (CL) suivantes :

CI	**CL**
$v(x,0) = 0$	$v(0,t) = 1$
$i(x,0) = 0$	$v(L,t) = 0$

1. Montrer que la transformée de Laplace de $v(x,t)$ notée $V(x,p)$ vérifie une équation différentielle du second ordre à coefficients constants que l'on précisera. On notera $V(x,p) = A(p)e^{\alpha x} + B(p)e^{-\alpha x}$ (où α dépend de R, C et p) la solution de cette équation différentielle.

2. En utilisant les conditions aux limites CL, donner le système d'équations vérifié par $A(p)$ et $B(p)$.

3. On admet qu'en utilisant les résultats des questions 1) et 2), on obtient :

$$V(x,p) = \frac{1}{p}\frac{\text{sh}\left[\tau\sqrt{p}\left(1-\frac{x}{L}\right)\right]}{\text{sh}\left[\tau\sqrt{p}\right]} \qquad 0 < x < L$$

   (a) Définir les déterminations de $\sqrt{p}$ et montrer que ces déterminations donnent la même valeur de $V(x,p)$ sur les bords supérieur et inférieur de la coupure. Dans ces conditions, il n'est plus nécessaire de couper le plan complexe et la fonction $V(x,p)$ est définie sur $\mathbb{C}$ privé des points singuliers isolés annulant son dénominateur $D(p) = p\text{sh}\left[\tau\sqrt{p}\right]$.

   (b) Déterminer les points singuliers isolés de $V(x,p)$ et les résidus en ces points singuliers isolés.

   (c) A l'aide de la formule d'inversion, donner l'expression de $v(x,t)$ sous la forme d'un développement en séries (on admettra que les intégrales sur les parties circulaires du contour de Bromwich tendent vers 0 lorsque le rayon $R \to \infty$).

   (d) Déduire des résultats précédents la valeur de :

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k}\sin\left(\frac{k\pi x}{L}\right) \qquad 0 < x < L$$

TSVP

Exercice 2

Le but de cet exercice est de déterminer l'intégrale suivante :

$$I(a) = \int_{-\pi}^{+\pi} \frac{\sin^2\theta}{1 - 2a\cos\theta + a^2} d\theta$$

pour $|a| < 1$ et $|a| > 1$.

1) Exprimer $\sin\theta$ et $\cos\theta$ en fonction de $z = e^{i\theta}$. En déduire une expression de $I(a)$ sous la forme d'une intégrale définie sur le cercle unité d'une fonction de la variable complexe $f(z)$ que l'on précisera

2) Donner les singularités de f et les résidus associés à ces singularités

3) En déduire $I(a)$ pour $|a| < 1$ et $|a| > 1$.

Exercice 3

1) On considère l'opération qui au signal $x(n)$ associe le signal $y_1(n)$ défini par

$$y_1(n) = \sum_{i=n-L}^{n-1} x(i) \tag{1}$$

a) Cette opération décrit-elle un filtre linéaire ? Si oui, quelle est sa transmittance $H_1(z) = TZ\left[h_1(n)\right]$ et sa réponse impulsionnelle $h_1(n)$?

b) Montrer que la transformée en Z du signal $s_1(n)$ défini par

$$\begin{aligned} s_1(i) &= 0 \text{ si } i \leq 0 \\ s_1(i) &= i \text{ si } i \in \{1, ..., L\} \\ s_1(i) &= L \text{ si } i > L \end{aligned}$$

est

$$S_1(z) = \frac{z^{-1}\left[1 - z^{-L}\right]}{\left(1 - z^{-1}\right)^2}$$

c) Calculer $Y_1(z)$ lorsque $x(n) = u(n)$ (échelon de Heaviside). En déduire la réponse indicielle de l'opération (1). Tracer cette réponse indicielle.

2) On considère le filtre linéaire qui au signal $x(n)$ associe le signal $y_2(n)$ défini par

$$y_2(n) = \sum_{i=n+1}^{n+L} x(i) \tag{2}$$

Déterminer la réponse indicielle de ce filtre en utilisant uniquement la relation (2). Tracer cette réponse indicielle.

3) On considère finalement l'opération de filtrage définie par

$$y(n) = -\sum_{i=n-L}^{n-1} x(i) + \sum_{i=n+1}^{n+L} x(i)$$

Déterminer la réponse indicielle associée à ce filtre. Quel est l'effet de ce filtre sur le signal représenté sur la figure 1 ? Donner une application pratique de ce résultat.

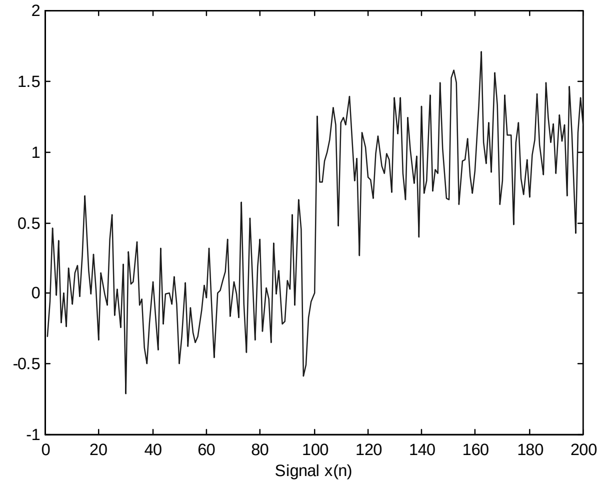

Figure 1 : Signal $x(n)$.

Rappels

Fonction	TL
$f(t)$	$F(p)$
$(-1)^n t^n f(t)$	$\frac{d^n}{dp^n} F(p)$
$f^{(n)}(t)$	$p^n F(p) - p^{n-1} f(0^+) - ... - f^{(n-1)}(0^+)$
$\int_0^t f(u)du$	$\frac{F(p)}{p}$
$\frac{f(t)}{t}$	$\int_p^\infty F(p)dp$
$e^{at} f(t)$	$F(p-a)$
$f(t-a)U(t-a)$	$e^{-ap} F(p)$
$f\left(\frac{t}{k}\right)$	$kF(kp)$
$\int_0^t f(u)g(t-u)du$	$F(p)G(p)$

Indication Exercice 3 question 1) b)

$$1 + 2x + ... + Lx^{L-1} = \frac{-(L+1)\,x^L\,(1-x) + 1 - x^{L+1}}{(1-x)^2}$$

.