Examen de Variable Complexe

Lundi 24 Novembre 2003 de 14h à 16h

INP ENSEEIHT

Exercice 1

On considère l'équation différentielle suivante

$$x\frac{\partial f(x,t)}{\partial t} + \frac{\partial f(x,t)}{\partial x} = x^3 \qquad t > 0, x > 0 \tag{1}$$

avec les conditions initiale et limites suivantes

$$\begin{cases} f(x,0) = 0 & \forall x > 0 \text{ (condition intiale)} \\ f(0,t) = 0 & \forall t > 0 \text{ (condition limite)} \end{cases} \tag{2}$$

1) Montrer que la transformée de Laplace de l'équation précédente s'écrit

$$\frac{dF(x,p)}{dx} + pxF(x,p) = \frac{x^3}{p} \qquad \forall x > 0 \tag{3}$$

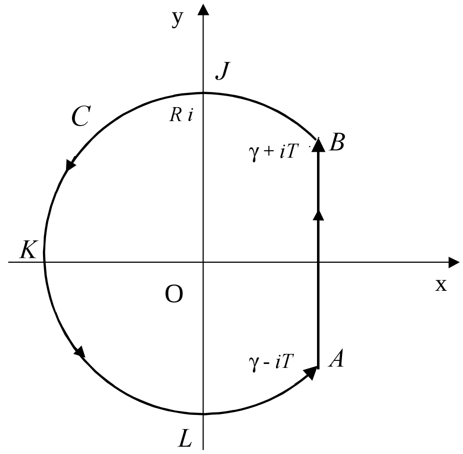
où $F(x,p) = TL\,[f(x,t)]$ (calculé à x fixé).
2) On considère dans ce qui suit p comme un paramètre. Il est bien connu (et on l'admettra) que la solution de générale de l'équation différentielle du premier ordre à coefficients constants (3) est la somme de la solution de l'équation sans second membre et d'une solution particulière de (3).
2.1) Montrer que la solution de l'équation sans second membre s'écrit $F_1(x,p) = C(p)\exp\left(-p\frac{x^2}{2}\right)$.
2.2) Déterminer les fonctions $A_0(p), A_1(p)$ et $A_2(p)$ telles que

$$F_2(x,p) = A_0(p) + A_1(p)x + A_2(p)x^2$$

soit solution de (3). En déduire la forme générale des solutions de (3).
2.3) En utilisant la condition limite de (2), montrer que la solution du problème (3) est

$$F(x,p) = \frac{px^2 - 2}{p^3} + \frac{2}{p^3}\exp\left(-\frac{p}{2}x^2\right) \qquad \forall x > 0 \tag{4}$$

2.4) A partir de (4) et des tables de transformées de Laplace, donner $f(x,t) = TL^{-1}\,[F(x,p)]$.
2.5) On désire appliquer la formule d'inversion de la transformée de Laplace pour déterminer $f(x,t)$ à partir de $F(x,p)$. On admettra que les les parties définies sur les arcs de cercle BJ et LA de ce contour tendent vers 0 lorque le rayon de ces arcs de cercle $R \to \infty$ et $t > 0$.



Retrouver l'expression de $f(x,t)$ déterminée au 2.5) à l'aide de la formule d'inversion de la transformée de Laplace.

Exercice 2

Soit $u(n)$ l'échelon de Heaviside défini par : $u(n) = \begin{cases} 1 \text{ si } n \geq 0 \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$.

1) Soit a un réel tel que $a \in]0,1[$. Déterminer la transformée en Z du signal

$$x_a(n) = (n+1)\, a^n u(n) \tag{5}$$

notée $X_a(z)$ et préciser avec soin la région de convergence de $X_a(z)$.

2) Déterminer la transformée en Z du signal

$$y_a(n) = -\,(n+1)\, a^n u(-n-1) \tag{6}$$

notée $Y_a(z)$ et préciser avec soin la région de convergence de $Y_a(z)$.

3) Soit b un réel tel que $b > a$. On considère un système de fonction de transfert

$$H(z) = \frac{1}{(1-bz^{-1})^2\,(1-az^{-1})^2}$$

Déterminer la réponse impulsionnelle $h(n)$ dans les trois cas suivants 1) la région de convergence de $H(z)$ est $|z| < a$, 2) la région de convergence de $H(z)$ est $a < |z| < b$, 1) la région de convergence de $H(z)$ est $|z| > b$.

Exercice 3

Pour calculer la somme de la série

$$S(\theta) = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{n \sin(n\theta)}{n^2 + a^2}, \qquad (a,\theta) \in \mathbb{R}^2$$

on pose

$$f(z) = \frac{ze^{iz\theta}}{z^2 + a^2} \text{ et } \varphi(z) = \frac{\pi}{\sin(\pi z)}$$

1) Quelles sont les singularités de $f\varphi$? Préciser la nature de ces singularités.
2) Calculer les résidus de $f\varphi$ aux singularités déterminées à la question précédente.
3) Appliquer le théorème des résidus à la fonction $f\varphi$ sur le contour C_n défini par $|z| = n + \frac{1}{2}$.
4) Pour quelles valeurs de θ l'intégrale de $f\varphi$ sur le contour C_n tend-elle vers 0 lorsque $n \to +\infty$?
(on notera D_θ l'ensemble des valeurs de θ tel que $\int_{C_n} f(z)\varphi(z)\,dz \to 0$ lorsque $n \to +\infty$).
5) Déterminer $S(\theta)$ lorsque $\theta \in D_\theta$.
6) Expliquer comment déterminer simplement $S(\theta)$ lorsque $\theta \notin D_\theta$.

Rappels

Fonction	TL
$f(t)$	$F(p)$
$(-1)^n t^n f(t)$	$\frac{d^n}{dp^n} F(p)$
$f^{(n)}(t)$	$p^n F(p) - p^{n-1} f(0^+) - ... - f^{(n-1)}(0^+)$
$\int_0^t f(u)du$	$\frac{F(p)}{p}$
$\frac{f(t)}{t}$	$\int_p^{\infty} F(p)dp$
$e^{at} f(t)$	$F(p-a)$
$f(t-a)U(t-a)$	$e^{-ap} F(p)$
$f\left(\frac{t}{k}\right)$	$kF(kp)$
$\int_0^t f(u)g(t-u)du$	$F(p)G(p)$

Fonction	TL	Convergence
$u(t)$	$\frac{1}{p}$	$x_c = 0$
$e^{\alpha t}$	$\frac{1}{p-\alpha}$	$x_c = \operatorname{Re} \alpha$
$e^{i\omega t}$	$\frac{1}{p-i\omega}$	$x_c = 0$
$ch\,(\alpha t)$	$\frac{p}{p^2-\alpha^2}$	$x_c = \sup \operatorname{Re}(\alpha, -\alpha)$
$sh\,(\alpha t)$	$\frac{\alpha}{p^2-\alpha^2}$	$x_c = \sup \operatorname{Re}(\alpha, -\alpha)$
$\cos \omega t$	$\frac{p}{p^2+\omega^2}$	$x_c = 0$
$\sin \omega t$	$\frac{\omega}{p^2+\omega^2}$	$x_c = 0$
t	$\frac{1}{p^2}$	$x_c = 0$
$t^n, n \in \mathbb{N}$	$\frac{n!}{p^{n+1}}$	$x_c = 0$

Fonction	TZ
$f(n)$	$F(z)$
$f(n-n_0)$	$z^{-n_0} F(z)$
$a^n f(n)$	$F\left(\frac{z}{a}\right)$
$nf(n)$	$-z\frac{dF(z)}{dz}$
$f(n) * g(n) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} f(k)g(n-k)$	$F(z)G(z)$