Corrigé du contrôle de Transmissions Numériques

25 novembre 2004

Ce document est le corrigé du contrôle de Transmissions Numériques donné aux 2TR le 3 décembre 2003. L'épreuve a duré 2 heures (le double de temps aurait été nécessaire, mais bon...). Les documents étaient autorisés. Merci à M. Roviras pour son aide sur certaines questions.

Table des matières

1 Exercice 1.

1.1 Comment appelle-t-on un signal du type de $x_2(t)$?

$$x_1(t) = \sum_k a_k \; \delta(t - kT_s)$$

$$\begin{aligned}
x_2(t) &= x_1(t) * g_1(t) \\
&= \left[\sum_k a_k \; \delta(t - kT_s)\right] * g_1(t) \\
&= \sum_k a_k \; g_1(t - kT_s)
\end{aligned}$$

Comme $g_1(t)$ est un filtre de mise en forme rectangulaire égal à 1 entre 0 et T_s et que $a_k = \pm V$:

$$x_2(t) = NRZ\,(\pm V, T_s)$$

1.2 Calculer la puissance du signal $x_2(t)$?

$$\begin{aligned}
P_{x_2} &= \lim_{T \to +\infty} \frac{1}{T} \int_{[T]} |x_2(t)|^2 \, dt \\
&= \lim_{T \to +\infty} \frac{1}{T} \int_{[T]} V^2 \, dt \\
&= \lim_{T \to +\infty} \frac{1}{T} \left(V^2 T\right) \\
&= V^2
\end{aligned}$$

1.3 Calculer la puissance du signal $x_3(t)$?

$$\begin{aligned}
\frac{1}{T} \int_{[T]} |x_3(t)|^2 \, dt &= \frac{1}{T} \int_{[T]} |x_2(t) \cos(2\pi f_p t)|^2 \, dt \\
&= \frac{1}{T} \int_{[T]} |x_2(t)|^2 \cos^2(2\pi f_p t) \, dt \\
&= \frac{1}{T} \int_{[T]} V^2 \cos^2(2\pi f_p t) \, dt \\
&= \frac{V^2}{T} \int_{[T]} \cos^2(2\pi f_p t) \, dt
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
P_{x_3} &= \lim_{T \to \frac{1}{f_p}} \left[\frac{1}{T} \int_{[T]} |x_3(t)|^2 \, dt \right] \\
&= \lim_{T \to \frac{1}{f_p}} \left[\frac{V^2}{T} \int_{[T]} \cos^2(2\pi f_p t) \, dt \right] \\
&= V^2 f_p \int_{[\frac{1}{f_p}]} \cos^2(2\pi f_p t) \, dt \\
&= V^2 f_p \, \frac{1}{2 f_p} \\
&= \frac{V^2}{2}
\end{aligned}
$$

1.4 Montrer que du point de vue relation entrée/sortie la chaîne de transmission présentée dans l'énoncé est équivalente à la chaîne passe-bas équivalente présenté dans la question 4.

$$x_2(t) = x_1(t) * g_1(t)$$

$$x_3(t) = x_2(t) \cos(2\pi f_p t)$$

Le canal est idéal donc : $x_4(t) = x_3(t) * c(t) = x_3(t) = x_2(t) \cos(2\pi f_p t)$

$$
\begin{aligned}
x_5(t) &= x_4(t) \cos(2\pi f_p t) \\
&= x_2(t) \cos^2(2\pi f_p t) \\
&= x_2(t) \frac{\cos(4\pi f_p t) + 1}{2} \\
&= \frac{1}{2} x_2(t) + \frac{1}{2} x_2(t) \cos(4\pi f_p t)
\end{aligned}
$$

$g_2(t)$ est un filtre passe-bas dont la fréquence de coupure est petite devant f_p, donc :

$$x_6(t) = x_5(t) * g_2(t) = \frac{1}{2} x_2(t) * g_2(t) = \frac{1}{2} x_1(t) * g_1(t) * g_2(t)$$

1.5 Montrer que la DSP du bruit $n_1(t)$ est égale à $\frac{N_0}{4}$.

$$n_1(t) = n(t) \cos(2\pi f_p t)$$

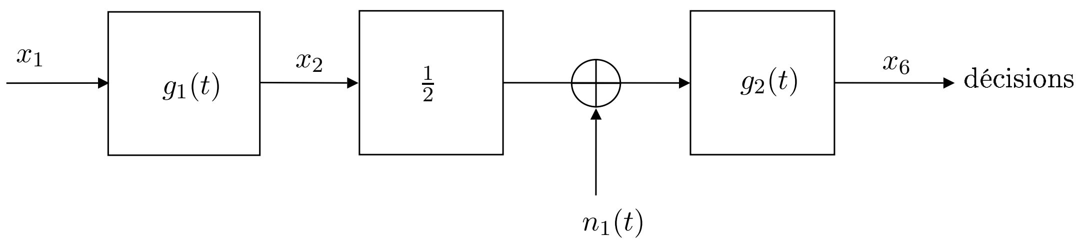
donc :

$$N_1(f) = N(f) * TF \left[\cos(2\pi f_p t) \right]$$

d'où :

$$\begin{aligned} S_{n_1}(f) &= S_n(f) * DSP\left[\cos(2\pi f_p t)\right] \\ &= S_n(f) * \left[\frac{1}{4}\left(\delta(f-f_p)+\delta(f+f_p)\right)\right] \\ &= \frac{1}{4}\left(S_n(f-f_p)+S_n(f+f_p)\right) \\ &= \frac{1}{4}\left(\frac{N_0}{2}+\frac{N_0}{2}\right) \\ &= \frac{N_0}{4} \end{aligned}$$

1.6 En déduire la chaîne passe-bas équivalente avec le bruit additif $n_1(t)$.



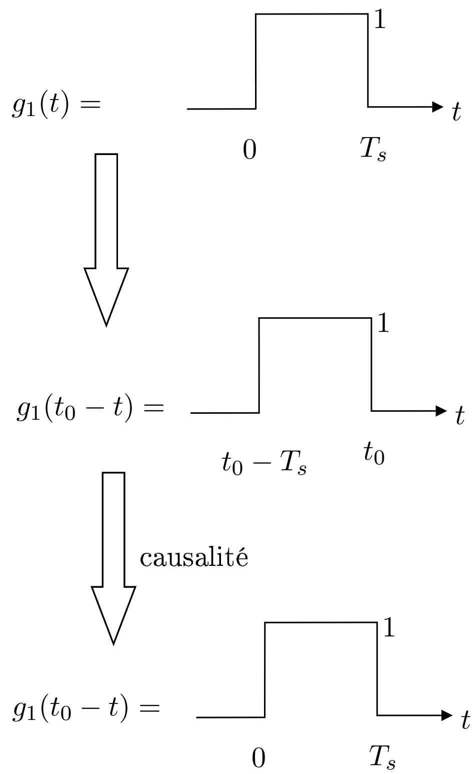
1.7 Calculer la réponse impulsionnelle de $g_2(t)$ de façon à avoir un filtre adapté en réception.

Posons : $p(t) = g_1(t) * \frac{1}{2}$ et $h_e(t) = g_1(t) * \frac{1}{2} * g_2(t)$

On a un filtre adapté en réception si : $g_2(t) = \frac{k}{S_{n_1}(f)} p^*(t_0 - t)$

D'où :

$$\begin{aligned} g_2(t) &= \frac{k}{S_{n_1}(f)} p^*(t_0-t) \\ &= \frac{k}{S_{n_1}(f)} p(t_0-t) \\ &= \frac{4k}{N_0}\left(g_1(t_0-t) * \frac{1}{2}\right) \\ &= \frac{2k}{N_0} g_1(t_0-t) \end{aligned}$$

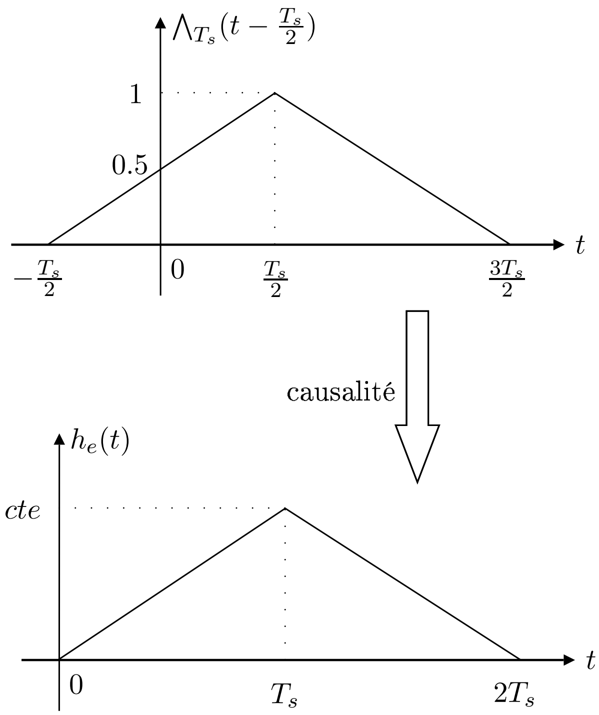


par suite : $g_2(t) = \frac{2k}{N_0} g_1(t)$

$g_2(t)$ est donc égal à $g_1(t)$ à une constante près.

1.8 La chaîne passe-bas équivalente vérifie-t-elle le 1er critère de Nyquist ?

$$\begin{aligned}
h_e(t) &= g_1(t) * \frac{1}{2} * g_2(t) \\
&= \frac{1}{2}\left[\prod_{T_s}(t - \frac{T_s}{2}) * \prod_{T_s}(t - \frac{T_s}{2})\right] \\
&= \frac{1}{2} T_s \bigwedge_{T_s}(t - \frac{T_s}{2})
\end{aligned}$$



$\exists t_0 = T_s$ tel que : $h_e(t_0) = 1$ et $h_e(t_0 + kT_s) = 0$ $(k \neq 0)$, la chaîne passe-bas équivalente vérifie donc Nyquist.

1.9 Calcul du TEB sur canal idéal.

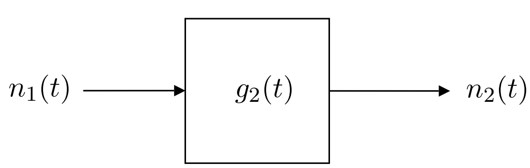
1.9.1 Donner les valeurs de $x_6(kT_s)$ aux instants de prise de décision.

Prise de décision en $t_0 = T_s$:

$$x_6(kT_s) = \pm V$$

$$P(\pm V) = \frac{1}{2}$$

1.9.2 Calculer la variance du bruit aux instants de prise de décision.



$$S_{n_2}(f) = S_{n_1}(f)|G_2(f)|^2$$

$$\Longrightarrow P_{n_2} = \frac{N_0}{4}\int |G_2(f)|^2\, df$$

d'après Perceval :

$$\begin{aligned} P_{n_2} &= \frac{N_0}{4}\int |g_2(f)|^2\, df \\ &= \frac{N_0}{4}T_s \end{aligned}$$

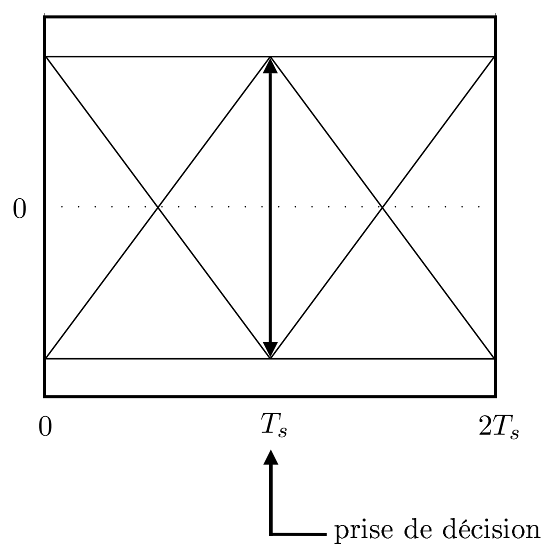
On sait que : $P_{n_2} = \mu_{n_2}^2 + \sigma_{n_2}^2$

Or $n_2(t)$ est un bruit à moyenne nulle, donc : $\mu_{n_2}^2 = 0$

d'où :

$$\sigma_{n_2}^2 = P_{n_2} = \frac{N_0}{4}T_s$$

1.9.3 Dessiner le diagramme de l'œil reçu en l'absence de bruit.



1.9.4 Donner la régle de décision MAP qui permet de distinguer les symboles reçus.

$\pm V$ équiprobables $\Longrightarrow seuil = \frac{(+V)+(-V)}{2} = 0$

Règle MAP :

$$si\ x_6(t_0 + kT_s) > 0 \Longrightarrow +V$$

$$si\ x_6(t_0 + kT_s) < 0 \Longrightarrow -V$$
$$si\ x_6(t_0 + kT_s) = 0 \Longrightarrow au\ choix$$

1.9.5 Calculer le TEB de la liaison.

$$TEB = Q\left[\frac{(+V) - (-V)}{2\sigma_{n_2}}\right] = Q\left[\frac{V}{\sigma_{n_2}}\right]$$

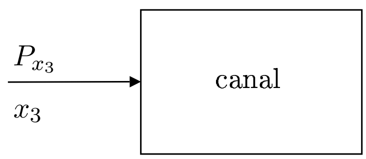
Or : $\sigma_{n_2}^2 = \frac{N_0}{4}T_s$

donc :

$$TEB = Q\left[\frac{2V}{\sqrt{N_0 T_s}}\right]$$

1.10 TEB sur canal idéal en fonction de $\frac{E_b}{N_0}$.

1.10.1 Calculer l'énergie E_b consommée pour émettre un bit dans le canal.



Énergie E_s consommée pour émettre un symbole dans le canal :

$$E_s = P_{x_3}T_s = \frac{V^2}{2}T_s$$

D'où l'énergie consommée pour émettre un bit dans le canal :

$$E_b = \frac{E_s}{nombre\ de\ bits\ par\ symbole}$$

Or, 1 symbole dure T_s, donc :

$$E_b = E_s = \frac{V^2}{2}T_s$$

1.10.2 Exprimer le TEB de la liaison en fonction de $\frac{E_b}{N_0}$.

$TEB = Q\left[\frac{2V}{\sqrt{N_0 T_s}}\right]$ et $\frac{E_b}{N_0} = \frac{V^2 T_s}{2N_0}$, donc :

$$TEB = Q\left[\frac{E_b}{N_0}\left(\frac{4\sqrt{N_0}}{VT_s\sqrt{T_s}}\right)\right]$$

1.11 Canal non idéal.

1.11.1 A-t-on de l'ISI ?

La réponse du canal de transmission vaut $c(t) = \delta(t) - 0,4\delta(t - T_s)$, donc on a de l'ISI.

1.11.2 Donner les valeurs de $x_6(kT_s)$ aux instants de prise de décision ainsi que les probabilités respectives de ces différentes valeurs.

Prise de décision en $t_0 = T_s$. Les valeurs sont : $\pm 1,4V$ et $\pm 0.6V$. Les quatre valeurs sont équiprobables.

1.12 Égaliseur ZFE en présence d'un canal non idéal.

1.12.1 Donner l'architecture de l'égaliseur ZFE avec 4 coefficients.

cf. polycopié.

1.12.2 Calculer les coefficients de l'égaliseur ZFE avec le canal de la question 1.11.

$$R.C = Y$$

$$R = \begin{pmatrix} r(0) & 0 & 0 & 0 \\ r(1) & r(0) & 0 & 0 \\ r(2) & r(1) & r(0) & 0 \\ r(3) & r(2) & r(1) & r(0) \end{pmatrix} \text{ avec } r(k) = x_6(t_0 + kT_s)$$

$$C = \begin{pmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix}$$

On veut obtenir : $Y = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

Un dirac en entrée donne :

$$r(0) = 1$$

$$r(1) = -0,4$$

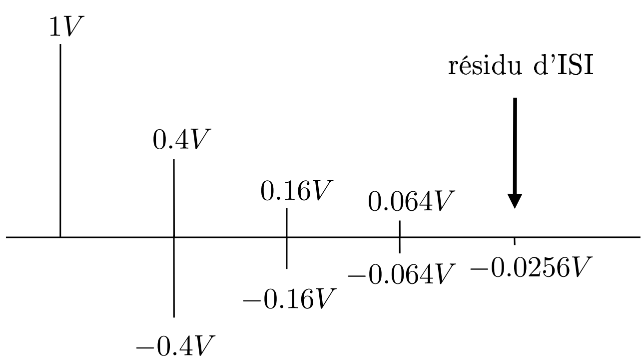
$$r(k) = 0 \ (k \geq 2)$$

Quels coefficients c_0, c_1, c_2 et c_3 ?

$$\begin{array}{l}
\{\ y(0) = 1 = c_0 r(0) \\
\{\ y(1) = 0 = c_0 r(1) + c_1 r(0) \\
\{\ y(2) = 0 = c_0 r(2) + c_1 r(1) + c_2 r(2) \\
\{\ y(3) = 0 = c_0 r(3) + c_1 r(2) + c_2 r(1) + c_3 r(0)
\end{array}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{array}{l}
\{\ c_0 = 1 \\
\{\ c_1 = 0,4 \\
\{\ c_2 = 0,16 \\
\{\ c_3 = 0,064
\end{array}$$

1.12.3 Donner les valeurs du signal , après l'égaliseur ZFE, aux instants de prise de décision.



t_0	$t_0 + T_s$	$t_0 + 2T_s$	$t_0 + 3T_s$	$t_0 + 4T_s$
$1V$	0	0	0	$-0.0256V$

1.13 Calcul du TEB dans le cas du canal non idéal (sans ZFE).

1.13.1 Donner la régle MAP de décision avec le canal de la question 1.11 ainsi que le seuil de décision utilisé.

$$\begin{array}{ccc}
0 & \rightarrow & -1,4V \\
 & \rightarrow & -0,6V
\end{array}$$

$$\begin{aligned} 1 &\rightarrow +1,4V \\ &\rightarrow +0,6V \end{aligned}$$

$$seuil = 0$$

1.13.2 Calculer le TEB de la liaison en fonction de $\frac{E_b}{N_0}$.

$$\begin{aligned}
P(erreur) &= P(emettre\ 0)P(erreur/0) + P(emettre\ 1)P(erreur/1) \\
&= \frac{1}{2}P(erreur/0) + \frac{1}{2}P(erreur/1) \\
&= \frac{1}{2}\left[P(erreur/-1,4V)P(-1,4V/0) + P(erreur/-0,6V)P(-0,6V/0)\right] \\
&\quad + \frac{1}{2}\left[P(erreur/+1,4V)P(+1,4V/0) + P(erreur/+0,6V)P(+0,6V/0)\right] \\
&= \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}P(erreur/-1,4V) + \frac{1}{2}P(erreur/-0,6V)\right] \\
&\quad + \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}P(erreur/+1,4V) + \frac{1}{2}P(erreur/+0,6V)\right] \\
&= \frac{1}{2}\left[Q\left(\frac{(+1,4V)-(-1,4V)}{2\sigma_{n_2}}\right) + Q\left(\frac{(+0,6V)-(-0,6V)}{2\sigma_{n_2}}\right)\right] \\
&= \frac{1}{2}Q\left[\frac{1,4V}{\sigma_{n_2}}\right] + \frac{1}{2}Q\left[\frac{0,6V}{\sigma_{n_2}}\right]
\end{aligned}$$

Or : $\sigma_{n_2} = \frac{\sqrt{N_0 T_s}}{\sqrt{2}}$ et $\frac{E_b}{N_0} = \frac{V^2 T_s}{2N_0}$

$$\begin{aligned}
TEB &= \frac{1}{2}Q\left[\frac{1,4V\sqrt{2}}{\sqrt{N_0 T_s}}\right] + \frac{1}{2}Q\left[\frac{0,6V\sqrt{2}}{\sqrt{N_0 T_s}}\right] \\
&= \frac{1}{2}Q\left[\frac{1,4E_b}{N_0}\left(\frac{2\sqrt{2N_0}}{VT_s\sqrt{Ts}}\right)\right] + \frac{1}{2}Q\left[\frac{0,6E_b}{N_0}\left(\frac{2\sqrt{2N_0}}{VT_s\sqrt{Ts}}\right)\right]
\end{aligned}$$

1.14 Calcul du TEB dans le cas d'un égaliseur ZFE avec un canal non idéal.

La variance du bruit après l'égaliseur est égale à σ^2.

$$TEB = \frac{1}{2}Q\left[\frac{1,0256V}{\sigma}\right] + \frac{1}{2}Q\left[\frac{0,9744V}{\sigma}\right]$$

1.15 Calcul du TEB dans le cas d'une erreur sur l'instant de décision.

1.15.1 Donner les valeurs de $x_6(kT_s + \frac{T_s}{4}$ aux instants de prise de décision ainsi que les probabilités respectives de ces différentes valeurs.

Instant de décision en $t_0 = kT_s + \frac{T_s}{4}$.

$$\begin{aligned}
x_6(\frac{T_s}{4} + kT_s) &= \pm 1,2V \\
&= \pm 0,7V \\
&= \pm 0,6V \\
&= \pm 0,1V
\end{aligned}$$

Ces valeurs sont équiprobables.

1.15.2 En déduire le TEB de la liaison.

$$\begin{aligned}
TEB &= P(emettre\ 0)P(erreur/0) + P(emettre\ 1)P(erreur/1) \\
&= \frac{1}{2}P(erreur/0) + \frac{1}{2}P(erreur/1)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
0 &\rightarrow -1,2V \\
&\rightarrow -0,7V \\
&\rightarrow -0,6V \\
&\rightarrow -0,1V
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
1 &\rightarrow +1,2V \\
&\rightarrow +0,7V \\
&\rightarrow +0,6V \\
&\rightarrow +0,1V
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
TEB = {} & \frac{1}{2}[P(erreur/-1,2V)P(-1,2V/0) + P(erreur/-0,7V)P(-0,7V/0) \\
& +P(erreur/-0,6V)P(-0,6V/0) + P(erreur/-0,1V)P(-0,1V/0)] \\
& +\frac{1}{2}[P(erreur/+1,2V)P(+1,2V/0) + P(erreur/+0,7V)P(+0,7V/0)
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
& +P(erreur/+0,6V)P(+0,6V/0)+P(erreur/+0,1V)P(+0,1V/0)] \\
= \quad & \frac{1}{2}[\frac{1}{4}P(erreur/-1,2V)+\frac{1}{4}P(erreur/-0,7V) \\
& +\frac{1}{4}P(erreur/-0,6V)+\frac{1}{4}P(erreur/-0,1V)] \\
& +\frac{1}{2}[\frac{1}{4}P(erreur/+1,2V)+\frac{1}{4}P(erreur/+0,7V) \\
& +\frac{1}{4}P(erreur/+0,6V)+\frac{1}{4}P(erreur/+0,1V)] \\
= \quad & \frac{1}{2}Q\left[\frac{1,2V}{2\sigma_{n_2}}\right]+\frac{1}{2}Q\left[\frac{0,7V}{2\sigma_{n_2}}\right]+\frac{1}{2}Q\left[\frac{0,6V}{2\sigma_{n_2}}\right]+\frac{1}{2}Q\left[\frac{0,1V}{2\sigma_{n_2}}\right]
\end{aligned}
$$

Fin du contrôle.