



Examen d'EDO

Jeudi 28 janvier 2010

▷ **Exercice 1.** (6 points) Soient α et β deux réels. On considère la matrice

$$A = \begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix}$$

1.1. On considère la matrice A comme étant une matrice dans \mathbf{C} , calculer les valeurs propres et une base de vecteurs propres de A . En déduire que l'on a

$$e^{tA} = e^{\alpha t} R(\beta t),$$

où $R(\beta t)$ est une matrice réelle d'une rotation que l'on déterminera.

1.2. On considère maintenant le problème de Cauchy

$$(IVP) \begin{cases} \dot{y}_1(t) = \alpha y_1(t) - \beta y_2(t) \\ \dot{y}_2(t) = \beta y_1(t) + \alpha y_2(t) \\ y(0) = (1, 0). \end{cases}$$

Donner, en fonction de α et β la solution de (IVP) .

1.3. Dans les différents cas suivants représenter graphiquement dans le plan de phase (y_1, y_2) la courbe solution et les vecteurs tangents en $t = 0$ et $\pi/2$,

$\alpha = 0$ et $\beta = 1$ cas (a)	$\alpha = \log(2)/(2\pi)$ et $\beta = 1$ cas (b)	$\alpha = -\log(2)/(2\pi)$ et $\beta = 1$ cas (c)
--	---	--

▷ **Exercice 2.** (4 points) Soit $y_0 > 0$ on considère la fonction

$$y :]t_0 - 1/y_0, +\infty[\longrightarrow \mathbf{R}$$
$$(t, y_0) \longmapsto y(t, y_0) = \frac{y_0}{(t - t_0)y_0 + 1},$$

et le système de Cauchy suivant

$$(IVP) \begin{cases} \dot{y}(t) = -y^2(t) \\ y(t_0) = y_0. \end{cases}$$

2.1. Vérifier que $y(t, y_0)$ est la solution de (IVP) et calculer

$$\frac{\partial y}{\partial y_0}(t, y_0).$$

2.2. Donner l'équation variationnelle que doit vérifier

$$\frac{\partial y}{\partial y_0}(\cdot, y_0)$$

et vérifier que la dérivée partielle calculée à la question **2.1** est bien solution de ce système variationnelle.

▷ **Exercice 3.** (8 points) On considère la méthode à un pas suivante

$$y_1 = y_0 + h(\alpha\varphi(t_0, y_0) + \beta\varphi(t_0 + h/2, y_0 + (h/2)\varphi(t_0, y_0)) + \gamma\varphi(t_0 + h, y_0 + h\varphi(t_0, y_0))).$$

3.1. Montrer que c'est un schéma de Runge-Kutta. On donnera le nombre d'étages et le tableau de Butcher 1.

$$\begin{array}{c|c} c & A \\ \hline & b^T \end{array}$$

TABLE 1 – *Tableau de Butcher.*

3.2. On donne les tableaux de Butcher pour les schémas d'Euler, du point milieu et des trapèzes.

$$\begin{array}{c|c} 0 & \\ \hline 0 & 1 \\ \hline \text{Euler} & \end{array} \quad \begin{array}{c|cc} 0 & & \\ 1/2 & 1/2 & \\ \hline & 0 & 1 \\ \hline \text{point milieu} & & \end{array} \quad \begin{array}{c|cc} 0 & & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ \hline & 1/2 & 1/2 \\ \hline \text{trapèze} & & \end{array}$$

TABLE 2 – *Schémas de Runge-Kutta classiques.*

Pour quelles valeurs du triplet (α, β, γ) retrouve-t-on

- la méthode d'Euler ;
- la méthode du point milieu ;
- la méthode des trapèzes.

3.3. Quelles relations doivent satisfaire le triplet (α, β, γ) pour que la méthode soit

- consistante ;
- d'ordre ≥ 1 ;
- d'ordre ≥ 2 .

On effectuera les calculs dans le cas où $y(t) \in \mathbf{R}$.

3.4. On considère maintenant dans \mathbf{R} le problème de Cauchy

$$(IVP) \begin{cases} \dot{y}(t) = y(t) \\ y(t_0) = y_0. \end{cases}$$

Donner y_1 en fonction de y_0 et de h . En déduire que cette méthode ne peut être d'ordre 3.

- ▷ **Exercice 4.** (3 points) Le but de cet exercice est de démontrer que toute méthode de Runge-Kutta explicite est stable. On suppose que la fonction $\varphi(t, y)$ est lipschitzienne par rapport à la variable y de constante L et on note le schéma de la façon suivante

$$\begin{aligned} z_1 &= y_0 \\ z_2 &= y_0 + ha_{21}\varphi(t_0, z_0) \\ &\vdots \\ z_s &= y_0 + h \sum_{j=1}^{s-1} a_{sj}\varphi(t_0 + c_jh, z_j) \\ y_1 &= y_0 + h\Phi(t_0, y_0, h) = y_0 + h \sum_{j=1}^s b_j\varphi(t_0 + c_jh, z_j). \end{aligned}$$

- 4.1.** On suppose que les \tilde{z}_i sont obtenues de façon identique à partir de \tilde{y}_0 et on pose $\alpha = \max_i(\sum_j |a_{ij}|)$. Montrer que l'on a pour tout $i = 1, \dots, s$

$$\|z_i - \tilde{z}_i\| \leq (1 + (\alpha Lh) + \dots + (\alpha Lh)^{i-1})\|y_0 - \tilde{y}_0\|.$$

- 4.2.** Montrer que $\Phi(t, y, h)$ est lipschitzienne par rapport à la variable y de constante

$$\Lambda = L \sum_{i=1}^s |b_i|(1 + (\alpha Lh) + \dots + (\alpha Lh)^{i-1}).$$

- 4.3.** En déduire que toute méthode de Runge-Kutta explicite est stable.



Corrigé de l'examen d'EDO Jeudi 28 janvier 2010

▷ **Exercice 1.** (6 points) $\lambda_1 = \alpha - i\beta$ et $\lambda_2 = \alpha + i\beta$ sont les valeurs propres de A .

1.1. – Si $\beta = 0$ alors $A = \alpha I$ et toute base de \mathbf{C}^2 est une base de vecteurs propres.

– Sinon on peut prendre respectivement

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} \text{ et } v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix}.$$

On peut donc écrire

$$A = P\Lambda P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ i & -i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ i & -i \end{pmatrix}^{-1}.$$

Donc

$$\begin{aligned} e^{tA} &= P e^{t\Lambda} P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ i & -i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{(\alpha-i\beta)t} & 0 \\ 0 & e^{(\alpha+i\beta)t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ i & -i \end{pmatrix}^{-1} \\ &= e^{\alpha t} \frac{1}{2i} \begin{pmatrix} i(e^{it\beta} + e^{-it\beta}) & e^{-it\beta} - e^{it\beta} \\ e^{it\beta} - e^{-it\beta} & i(e^{-it\beta} + e^{it\beta}) \end{pmatrix} \\ &= e^{\alpha t} \begin{pmatrix} \cos(\beta t) & -\sin(\beta t) \\ \sin(\beta t) & \cos(\beta t) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

1.2. On considère maintenant le problème de Cauchy

$$(IVP) \begin{cases} \dot{y}_1(t) = \alpha y_1(t) - \beta y_2(t) \\ \dot{y}_2(t) = \beta y_1(t) + \alpha y_2(t) \\ y(0) = (1, 0). \end{cases}$$

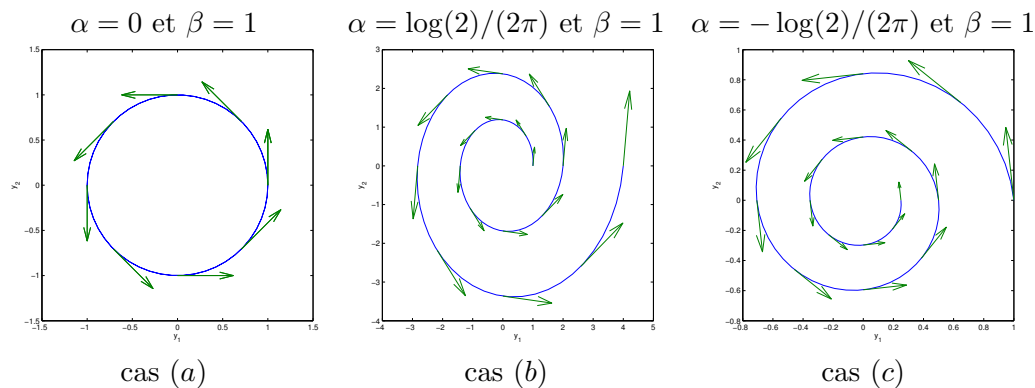
On a $\dot{y}(t) = Ay(t)$. Par suite la solution est

$$y(t) = e^{tA} y_0.$$

Ce qui donne ici

$$y(t) = e^{\alpha t} \begin{pmatrix} \cos(\beta t) \\ \sin(\beta t) \end{pmatrix}.$$

1.3.



▷ **Exercice 2.** (4 points)

2.1.

$$\frac{\partial y}{\partial y_0}(t, y_0) = \frac{1}{((t - t_0)y_0 + 1)^2}.$$

2.2.

$$(VAR) \begin{cases} \dot{Y}(t) = \frac{\partial \varphi}{\partial y}(t, y(t, y_0))Y(t) = -2y(t, y_0)Y(t) = -2\frac{y_0}{((t-t_0)y_0+1)}Y(t) \\ Y(t_0) = I = 1. \end{cases}$$

$$\frac{\partial y}{\partial y_0}(t_0, y_0) = 1$$

et

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial y}{\partial y_0}(t, y_0) = -2\frac{y_0}{((t - t_0)y_0 + 1)^3} = -2y(t, y_0) \frac{\partial y}{\partial y_0}(t, y_0)$$

▷ **Exercice 3.** (8 points) On considère la méthode à un pas suivante

$$y_1 = y_0 + h(\alpha\varphi(t_0, y_0) + \beta\varphi(t_0 + h/2, y_0 + (h/2)\varphi(t_0, y_0)) + \gamma\varphi(t_0 + h, y_0 + h\varphi(t_0, y_0))).$$

3.1.

$$\begin{aligned} k_1 &= \varphi(t_0, y_0) \\ k_2 &= \varphi(t_0 + h/2, y_0 + (h/2)k_1) \\ k_3 &= \varphi(t_0 + h, y_0 + hk_1) \\ y_1 &= y_0 + h(\alpha k_1 + \beta k_2 + \gamma k_3) \end{aligned}$$

Le tableau de Butcher associé est donc (cf. table 1).

3.2. – $\alpha = 1, \beta = 0$ et $\gamma = 0$ pour la méthode d’Euler.

– $\alpha = 0, \beta = 1$ et $\gamma = 0$ pour la méthode du point milieu.

– $\alpha = 1/2, \beta = 0$ et $\gamma = 1/2$ pour la méthode des trapèzes.

0	0		
1/2	1/2	0	
1	1	0	0
	α	β	γ

TABLE 1 – *Tableau de Butcher.*

3.3. – Pour la consistance. Il faut $\Phi(t, y, 0) = \varphi(t, y) \iff \alpha + \beta + \gamma = 1$.

– Pour que l'ordre soit ≥ 1 . On a

$$\begin{aligned}
 y(t_0 + h) &= y_0 + h\dot{y}(t_0) + O(h^2) \\
 &= y_0 + h\varphi(t_0, y_0) + O(h^2) \\
 y_1 &= y_0 + h\Phi(t_0, y_0, h) \\
 &= y_0 + h(\alpha\varphi(t_0, y_0) + \beta\varphi(t_0, y_0) + \gamma\varphi(t_0, y_0) + O(h)) \\
 &= y_0 + h(\alpha + \beta + \gamma)\varphi(t_0, y_0) + O(h^2).
 \end{aligned}$$

Par suite l'ordre sera ≥ 1 si et seulement si $\alpha + \beta + \gamma = 1$.

– Pour que l'ordre soit ≥ 2 .

$$\begin{aligned}
 y(t_0 + h) &= y_0 + h\dot{y}(t_0) + (h^2/2)\ddot{y}(t_0) + O(h^3) \\
 &= y_0 + h\varphi(t_0, y_0) + (h^2/2)(\varphi_t(t_0, y_0) + \varphi_y(t_0, y_0)\varphi(t_0, y_0)) + O(h^3) \\
 y_1 &= y_0 + h\Phi(t_0, y_0, h) \\
 &= y_0 + h(\alpha\varphi(t_0, y_0) + \beta(\varphi(t_0, y_0) + (h/2)(\varphi_t(t_0, y_0) + \varphi_y(t_0, y_0)\varphi(t_0, y_0))) \\
 &\quad + \gamma(\varphi(t_0, y_0) + h(\varphi_t(t_0, y_0) + \varphi_y(t_0, y_0)\varphi(t_0, y_0))) + O(h^2)) \\
 &= y_0 + h(\alpha + \beta + \gamma)\varphi(t_0, y_0) + (h^2/2)(\beta + 2\gamma)(\varphi_t(t_0, y_0) + \varphi_y(t_0, y_0)\varphi(t_0, y_0)) + O(h^3).
 \end{aligned}$$

Par suite l'ordre sera ≥ 2 si et seulement si $\alpha + \beta + \gamma = 1$ et $\beta + 2\gamma = 1$.

3.4. On considère maintenant dans \mathbf{R} le problème de Cauchy

$$(IVP) \begin{cases} \dot{y}(t) = y(t) \\ y(t_0) = y_0. \end{cases}$$

$$y_1 = y_0(1 + (\alpha + \beta + \gamma)h + (\beta + 2\gamma)(h^2/2)).$$

Mais la solution exacte est

$$y(t_0 + h) = y_0 e^h = y_0(1 + h + h^2/2 + h^3/6 + O(h^4))$$

Le schéma ne peut donc être d'ordre ≥ 3 .

▷ **Exercice 4.** (3 points) Le but de cet exercice est de démontrer que toute méthode de Runge-Kutta explicite est stable. On suppose que la fonction

$\varphi(t, y)$ est lipschitzienne par rapport à la variable y de constante L et on note le schéma de la façon suivante

$$\begin{aligned} z_1 &= y_0 \\ z_2 &= y_0 + ha_{21}\varphi(t_0, z_0) \\ &\vdots \\ z_s &= y_0 + h \sum_{j=1}^{s-1} a_{sj}\varphi(t_0 + c_jh, z_j) \\ y_1 &= y_0 + h\Phi(t_0, y_0, h) = y_0 + h \sum_{j=1}^s b_j\varphi(t_0 + c_jh, z_j). \end{aligned}$$

4.1. On suppose que les \tilde{z}_i sont obtenues de façon identique à partir de \tilde{y}_0 et on pose $\alpha = \max_i(\sum_j |a_{ij}|)$. Montrer que l'on a pour tout $i = 1, \dots, s$

$$\|z_i - \tilde{z}_i\| \leq (1 + (\alpha Lh) + \dots + (\alpha Lh)^{i-1})\|y_0 - \tilde{y}_0\|.$$

Effectuons un raisonnement par récurrence. La propriété est vraie pour $i = 1$ car $\|z_1 - \tilde{z}_1\| = \|y_0 - \tilde{y}_0\|$. Supposons la vraie pour i et montrons la pour $i + 1$.

$$\begin{aligned} \|z_{i+1} - \tilde{z}_{i+1}\| &\leq \|y_0 - \tilde{y}_0\| + h \sum_{j=1}^i |a_{ij}|L\|z_j - \tilde{z}_j\| \\ &\leq \|y_0 - \tilde{y}_0\| + h \sum_{j=1}^i |a_{ij}|L(\max_{j \leq i} \|z_j - \tilde{z}_j\|) \\ &\leq \|y_0 - \tilde{y}_0\|(1 + h\alpha L(1 + \dots + (\alpha Lh)^{i-1})) \\ &\leq \|y_0 - \tilde{y}_0\|(1 + \alpha Lh + \dots + (\alpha Lh)^i). \end{aligned}$$

4.2. Montrer que $\Phi(t, y, h)$ est lipchitzienne par rapport à la variable y de constante

$$\Lambda = L \sum_{i=1}^s |b_i|(1 + (\alpha Lh) + \dots + (\alpha Lh)^{i-1}).$$

On a

$$\begin{aligned} \|\Phi(t, y_0, h) - \Phi(t, \tilde{y}_0, h)\| &\leq \sum_{i=1}^s |b_i|L\|z_i - \tilde{z}_i\| \\ &\leq L \sum_{i=1}^s |b_i|(1 + (\alpha Lh) + \dots + (\alpha Lh)^{i-1})\|y_0 - \tilde{y}_0\|. \end{aligned}$$

4.3. En déduire que toute méthode de Runge-Kutta explicite est stable.

Il suffit d'appliquer le théorème (IV.9) du cours.