EXAMEN EN E.V.N

Tous les exercices sont indépendants. Le barème prévisionnel est indiqué pour chaque exercice. Seul document autorisé : une feuille de notes de cours recto-verso.
Rendre sur deux copies séparées les exercices 1, 2 d'une part et 3 d'autre part.

Exercice 1 (7 points)

2 1- Soit (E,d) un espace métrique dans lequel toutes les boules fermées sont compactes. (E,d) est-il un espace complet ? Démonstration exigée.

1 2- Soit (E,d) un espace métrique compact. (E,d) est-il un espace complet ? Démonstration exigée..

2 3- On se propose de démontrer le théorème de TYCHONOFF dans le cas particulier où (E,d_E) , (F,d_F) sont deux espaces métriques et (G,d_G) est l'espace métrique produit, à savoir :

$$\begin{cases} G = E \times F \\ et \\ (\forall((x_1,y_1),(x_2,y_2)) \in G^2) \quad d_G((x_1,y_1),(x_2,y_2)) \stackrel{d}{=} Max(d_E(x_1,x_2),d_F(y_1,y_2)) \end{cases}$$

(nota : la distance d_G définit sur G la topologie produit des deux topologies métriques de E et F). Démontrer :

$$((E,d_E) \text{ et } (F,d_F) \text{ compacts}) \Rightarrow ((G,d_G) \text{ compact})$$

2 4- Soit $(E_i(\neq \emptyset),\mathcal{O}_i)_{i\in I}$ une famille quelconque d'espaces topologiques, démontrer :

$$\left(\left(\prod_{i\in I} E_i, \bigotimes_{i\in I} \mathcal{O}_i\right) \text{ compact}\right) \Rightarrow ((\forall i \in I) \ : \ (E_i,\mathcal{O}_i) \text{ compact})$$

Exercice 2 (7 points)

Soit $(E,\mathcal{O})$ un espace topologique compact. On note $F \stackrel{n}{=} (\mathcal{C}^0(E,\mathbb{R}),\|.\|_\infty)$, où :

$$(\forall f \in F) : \|f\|_\infty \stackrel{d}{=} \begin{cases} Sup & |f(x)| \\ x \in E \end{cases}$$

Soient alors :

$$\begin{cases} X \stackrel{n}{=} (x_n)_{n\in\mathbb{N}} & \in E^{\mathbb{N}} \\ a \stackrel{n}{=} (a_n)_{n\in\mathbb{N}} & \in l^1_{\mathbb{R}} \stackrel{d}{=} \left\{ b \stackrel{n}{=} (b_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} / \sum_{n=0}^{\infty} |b_n| < \infty \right\} \end{cases}$$

On considère l'application :

$$\begin{cases} \varphi_{a,X} : & F \to \mathbb{R} \\ & f \mapsto \varphi_{a,X}(f) \stackrel{d}{=} \sum_{n=0}^{\infty} a_n f(x_n) \end{cases}$$

3 1- Démontrer que : $\varphi_{a,X} \in F^* \stackrel{n}{=} L(F,\mathbb{R})$.

3 2- Démontrer que : $\varphi_{a,X} \in F' \stackrel{n}{=} \mathcal{L}(F,\mathbb{R})$.

1 3- Donner un majorant de $|||\varphi_{a,X}|||$.

Exercice 3 (7 points)

Soient :

- (X, d) un espace métrique ;
- $(E, \|.\|)$ un espace vectoriel normé ;
- $\mu \in]0,1] \subset \mathbb{R}$

On note : $C^0_\mu(X,E) \overset{n}{=} \{f \in E^X / (\exists c_f \geq 0)(\forall (x,y) \in X^2) : \|f(x) - f(y)\| \leq c_f d(x,y)^\mu\}$.

(nota : de telles fonctions sont dites μ-Hölderiennes)

1- Montrer que : $C^0_\mu(X,E)$ est un sous-espace vectoriel de $C^0(X,E)$.

2- Soit $a \in X$. Montrer que :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \|.\|_a : & C^0_\mu(X,E) \to \mathbb{R} \\ & f \mapsto \|f\|_a = \|f(a)\| + \left\{ \begin{array}{l} Sup \\ x \neq y \end{array} \right. \dfrac{\|f(x) - f(y)\|}{d(x,y)^\mu} \end{array} \right.$$

est une norme sur $C^0_\mu(X,E)$.

3- Montrer que : $(\forall b \in X \backslash \{a\})$: $\|.\|_a$ et $\|.\|_b$ sont équivalentes.

4- On suppose que $(E, \|.\|)$ est un espace de Banach. Montrer alors que : $(C^0_\mu(X,E), \|.\|_a)$ est aussi un espace de Banach.

Corrigé du partiel E.V.N.

I] 1°) OUI, car si $(x_n)_n \in E^{\mathbb{N}}$ est 1 s. de Cauchy, elle est bornée, donc incluse dans une boule, choisie fermée, laquelle est compacte par hypothèse et alors le Th. de Bolzano-Weierstrass $\Rightarrow$ elle admet une valeur d'adhérence, et comme la s. est de Cauchy elle converge néces. vers cette valeur. cqfd

2°) OUI, conséquence du 1°) puisque tout fermé dans 1 compact est compact, notamment les boules fermées.

3°) Puisque G est métrique on se sert de la C.S. : "de tte s. on peut extraire 1 ss.s. cvgte" (corollaire de B.W.) pour montrer qu'il est compact. Soit donc $(z_n)_{n\geq 0} \in G^{\mathbb{N}}$, alors :

$(\forall n\geq 0)(\exists (x_n,y_n)\in E\times F) : z_n = (x_n,y_n)$ mais alors : $(x_n)_n \in E^{\mathbb{N}}$ avec E compact $\overset{B.W}{\Longrightarrow} (\exists x\in E)$ $(\exists \varphi : \mathbb{N} \xrightarrow{\text{st}\uparrow} \mathbb{N}) : (x_{\varphi(n)})_{n\geq 0} \xrightarrow[n\to\infty]{E} x$. Mais alors $(y_{\varphi(n)})_{n\geq 0} \in F^{\mathbb{N}}$ avec F compact $\overset{BW}{\Longrightarrow} (\exists y\in F)$ $(\exists \psi : \mathbb{N} \xrightarrow{\text{st}\uparrow} \mathbb{N}) : (y_{\varphi\circ\psi(n)})_n \xrightarrow[n\to\infty]{F} y$. Notons : $\delta \overset{\circ}{=} \varphi\circ\psi : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ st $\uparrow$, alors :

$$(x_{\delta(n)})_n \xrightarrow[n\to\infty]{E} x \quad \text{et donc :} \quad (z_{\delta(n)})_n = ((x_{\delta(n)}, y_{\delta(n)}))_n \xrightarrow[n\to\infty]{G} (x,y) \quad \text{cqfd.}$$

4°) Soit $i_0 \in I$. (E_{i_0}, θ_{i_0}) est un e.t. séparé puisque l'e.t. produit étant compact est séparé par déf. (c'est la ppté (ii) 1.11 polycop p:16)

De plus : $E_{i_0} = p_{i_0}\left(\prod_{i\in I} E_i\right)$ où p_{i_0} désigne la projection canonique d'indice i_0.

Comme p_{i_0} est continue (ppté 3.9), E_{i_0} est compact comme image directe du compact $\prod_{i\in I} E_i$ par l'app. cont. p_{i_0} (ppté 5.6)

II] 1°) Il s'agit de m.q. $\varphi_{a,x}$ est une forme linéaire sur F.

- forme ? càd la série de t.g. $a_n.f(x_n)$ est-elle convergente ? oui, car on a :

$(\forall n\geq 0) : |a_n . f(x_n)| = |a_n| . |f(x_n)| \leq |a_n| . \|f\|_\infty$ et la série de t.g. $|a_n|$ est cvgte puisque $a \in \ell^1_{\mathbb{R}}$. Ainsi la série de t.g. $a_n.f(x_n)$ est-elle abs. cvgte ds $\mathbb{R}$ Banach $\Rightarrow$ elle converge cqfd.

- linéaire ? oui c'est le résultat de la structure d'e.v de F plus la bilinéarité du produit usuel dans $\mathbb{R}$ plus la structure d'e.v de l'ens. des séries cvgtes. ce qui permet d'écrire : $(\forall (f_1,f_2,\lambda) \in F\times F\times\mathbb{R})$:

$$\varphi_{a,x}(f_1+\lambda f_2) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n.(f_1+\lambda f_2)(x_n) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n.(f_1(x_n)+\lambda.f_2(x_n)) = \sum_{n=0}^{\infty}(a_n.f_1(x_n)+\lambda a_n f_2(x_n))$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty} a_n.f_1(x_n) + \lambda\sum_{n=0}^{\infty} a_n.f_2(x_n) = \varphi_{a,x}(f_1)+\lambda.\varphi_{a,x}(f_2) \quad \text{cqfd.}$$

2°) Il s'agit de démontrer que, de plus, $\varphi_{a,x}$ est continue. Pour cela, étant linéaire, m.q. elle est Lipschitzienne. En effet :

$$(\forall f\in F) : |\varphi_{a,x}(f)| = \left|\sum_{n=0}^{\infty} a_n.f(x_n)\right| = \left|\lim_{N\to\infty}\sum_{n=0}^{N} a_n.f(x_n)\right| \underset{|\,|\text{ continue}}{=} \lim_{N\to\infty}\left|\sum_{n=0}^{N} a_n.f(x_n)\right|$$

b2 : $(\forall N\geq 0)$: $\left|\sum_{n=0}^{N} a_n\cdot f(x_n)\right| \leq \sum_{n=0}^{N}|a_n|\cdot|f(x_n)| \leq \|f\|_\infty\cdot\sum_{n=0}^{\infty}|a_n| \leq \|f\|_\infty\cdot\|a\|_1$

(où : $\|a\|_1 \overset{d}{=} \sum_{n=0}^{\infty}|a_n|$). D'où : $|\varphi_{a,x}(f)| \leq \|a\|_1\cdot\|f\|_\infty$ ainsi $\varphi_{a,x}$ est-elle $\|a\|_1$-Lipschitzienne donc continue, càd : $\varphi_{a,x}\in F'$ cqfd

3°) Par déf. : $|||\varphi_{a,x}||| \overset{d}{=} \operatorname{Inf}\{k\geq 0 / (\forall f\in F) : |\varphi_{a,x}(f)| \leq k\cdot\|f\|_\infty\}$

il résulte donc de la majoration obtenue au 2°) que : $|||\varphi_{a,x}||| \leq \|a\|_1$.

III] 1°) M.q : $\mathcal{C}^0_\mu(X,E)\subset\mathcal{C}^0(X,E)$ càd que Ttc fon. μ-Höldérienne est continue. Il faut m.q :
$(\forall f\in\mathcal{C}^0_\mu(X,E))(\forall x\in X)(\forall\varepsilon>0)(\exists\eta_{\varepsilon,x}>0)(\forall y\in X) : d(x,y)\leq\eta_{\varepsilon,x} \Rightarrow \|f(x)-f(y)\|\leq\varepsilon$?

Soit donc : f, x et ε donnés. En prenant $y\in X$ tel que : $d(x,y)\leq\left(\varepsilon/c_f\right)^{1/\mu}$ ($c_f>0$; si $c_f=0 \Rightarrow f$ est donc continue), on a :

$$\|f(x)-f(y)\| \leq c_f\cdot d(x,y)^\mu \leq c_f\cdot\frac{\varepsilon}{c_f} = \varepsilon .$$ Donc il faut prendre $\eta_{\varepsilon,x} \overset{d}{=} \left(\frac{\varepsilon}{c_f}\right)^{1/\mu}$ cqfd.

Ensuite $\mathcal{C}^0_\mu(X,E)$ est 1 ss ev de $\mathcal{C}^0(X,E)$ puisque si $(f,g,\lambda)\in\mathcal{C}^0_\mu(X,E)^2\times\mathbb{R}$, on a :

$$\|(f+\lambda.g)(x)-(f+\lambda g)(y)\| = \|(f(x)-f(y))+\lambda(g(x)-g(y))\| \leq \|f(x)-f(y)\|+|\lambda|\cdot\|g(x)-g(y)\|$$
$$\leq c_f\cdot d(x,y)^\mu+|\lambda|\cdot c_g\, d(x,y)^\mu = \underbrace{[c_f+|\lambda|\cdot c_g]}_{\overset{n}{=}c_h>0}\cdot d(x,y)^\mu$$
càd $h\overset{n}{=}f+\lambda g\in\mathcal{C}^0_\mu(X,E)$. cqfd

2°) $f\in\mathcal{C}^0_\mu(X,E) \Rightarrow (\exists c_f\geq 0)(\forall(x,y)\in X^2, x\neq y) : \frac{\|f(x)-f(y)\|}{d(x,y)^\mu}\leq c_f$ et ceci $\Rightarrow$
$\operatorname{Sup}_{x\neq y}\frac{\|f(x)-f(y)\|}{d(x,y)^\mu}\leq c_f$ donc $\|\cdot\|_a$ est bien définie et à valeurs ds $\mathbb{R}_+$.

. Si $f=0$ alors $\|f\|_a=0$ évident. Récip. : si $\|f\|_a=0$ alors $\|f(a)\| = \operatorname{Sup}_{x\neq y}\frac{\|f(x)-f(y)\|}{d(x,y)^\mu}=0$
$\Rightarrow f(x)=f(y)\ \forall x\neq y$ càd f constante ; et : $\|f(a)\|=0 \Rightarrow f(a)=0$, càd : $f=0$.

. $(\forall\lambda\in\mathbb{R}) : \|\lambda.f\|_a = |\lambda|\cdot\|f\|_a$ évident. $(\forall x\neq y) : \|(f+g)(x)-(f+g)(y)\|\leq\|f(x)-f(y)\|+\|g(x)-g(y)\|$
$\Rightarrow \operatorname{Sup}_{x\neq y}\frac{\|(f+g)(x)-(f+g)(y)\|}{d(x,y)^\mu} \leq \operatorname{Sup}_{x\neq y}\frac{\|f(x)-f(y)\|}{d(x,y)^\mu}+\operatorname{Sup}_{x\neq y}\frac{\|g(x)-g(y)\|}{d(x,y)^\mu}$ et comme $\|(f+g)(a)\|\leq\|f(a)\|+\|g(a)\|$
$\Rightarrow \|f+g\|_a\leq\|f\|_a+\|g\|_a$. Ainsi $\|\cdot\|_a$ est bien 1 norme sur $\mathcal{C}^0_\mu(X,E)$ cqfd.

3°) On a : $|\,\|f(a)\|-\|f(b)\|\,| \leq \|f(a)-f(b)\| \Rightarrow \|f(a)\|\leq\|f(b)\|+d(a,b)^\mu\cdot\frac{\|f(a)-f(b)\|}{d(a,b)^\mu}$
notons $c_f\overset{n}{=}\operatorname{Sup}_{x\neq y}\frac{\|f(x)-f(y)\|}{d(x,y)^\mu} \Rightarrow \|f(a)\|+c_f\leq\|f(b)\|+c_f+d(a,b)^\mu\cdot c_f \Rightarrow$
$\|f\|_a\leq\|f(b)\|+(1+d(a,b)^\mu)c_f\leq\|f(b)\|(1+d(a,b)^\mu)+(1+d(a,b)^\mu)c_f = \underbrace{[1+d(a,b)^\mu]}_{k>0}\cdot\|f\|_b$
donc $\|\cdot\|_a$ moins fine que $\|\cdot\|_b$, et comme a et b jouent des rôles symé. cqfd

4°) Soit $(f_n)_{n\geq 0}$ une suite de Cauchy d'élmts de $\mathcal{C}^0_\mu(X,E)$; on a :

$(\mathcal{C}) : (\forall\varepsilon>0)(\exists N_\varepsilon\in\mathbb{N})(\forall p,q\geq N_\varepsilon) : \|f_p-f_q\|_a\leq\varepsilon$.

1ère étape : "construction de la limite en 1 certain sens" : puisque :

$$\|f_p - f_q\|_a = \|f_p(a) - f_q(a)\| + \sup_{x\neq y} \frac{\|(f_p-f_q)(x) - (f_p-f_q)(y)\|}{d(x,y)^\mu}$$ on a

$(\mathcal{C}) \Rightarrow$ la s. $(f_n(a))_{n\geq 0}$ est de Cauchy ds E, or E Banach $\Rightarrow$ elle cvge ds E ;

et comme on a vu au 3°) que $\|\cdot\|_x$ est équivalente à $\|\cdot\|_a$, ceci $\forall x\in X$, on en déduit que : $(\forall x\in X)$: $(f_n(x))_{n\geq 0}$ cvge ds E. càd :

$(\forall x\in X)(\exists!\, y_x\in E) : (f_n(x))_n \xrightarrow[n\to\infty]{(E,\|\cdot\|)} y_x$. Bilan : si on note $f : X \longrightarrow E$, $x \longmapsto f(x) \stackrel{d}{=} \lim_{n\to\infty} f_n(x)$

alors on a m.q. : $(f_n) \xrightarrow[n\to\infty]{C.S} f$.

2ème étape : $f\in \mathcal{C}^0_\mu(X,E)$? : prenons $p\geq N_\varepsilon$ (rang de Cauchy associé au $\varepsilon>0$). Alors :

$$\|(f_p(x) - f(x)) - (f_p(y) - f(y))\| = \|(f_p(x) - \lim_{q\to\infty} f_q(x)) - (f_p(y) - \lim_{q\to\infty} f_q(y))\|$$

$$'' \quad = \lim_{q\to\infty} \|(f_p(x) - f_q(x)) - (f_p(y) - f_q(y))\|$$ mais on sait que quand $q\geq N_\varepsilon$ on a : $\|(f_p-f_q)(x) - (f_p-f_q)(y)\| \leq \varepsilon . d(x,y)^\mu$

donc : $\|(f_p-f)(x) - (f_p-f)(y)\| \leq \varepsilon . d(x,y)^\mu$, cela $\forall (x,y)\in X^2$ $x\neq y$ ce qui prouve que la fonction $f_p - f\in \mathcal{C}^0_\mu(X,E)$; et comme $f_p \in \mathcal{C}^0_\mu(X,E)$ qui est 1 e.v $\Rightarrow$ $f\in\mathcal{C}^0_\mu(X,E)$ cqfd

3ème étape : $(f_n)_{n\geq 0} \xrightarrow[n\to\infty]{\|\cdot\|_a} f$? : Il f.m.q. : $(\forall\varepsilon>0)(\exists N'_\varepsilon\geq 0)(\forall n\geq N'_\varepsilon) : \|f_p - f\|_a \leq \varepsilon$?

Soit $\varepsilon>0$ donné ; la 2ème étape assure que en prenant $p\geq N_{\varepsilon/2}$ (celui de Cauchy) on a :

$\sup_{x\neq y} \frac{\|(f_p-f)(x) - (f_p-f)(y)\|}{d(x,y)^\mu} \leq \varepsilon/2$. Et la cvgce de $(f_p(a))_{p\geq 0}$ vers $(f(a))$ assure qu'il $(\exists N''_{\varepsilon/2}\geq 0)(\forall p\geq N''_{\varepsilon/2}) : \|f_p(a) - f(a)\| \leq \varepsilon/2$

d'où en prenant : $p\geq N'_\varepsilon \stackrel{d}{=} \mathrm{Max}(N_{\varepsilon/2}, N''_{\varepsilon/2})$ on a bien : $\|f_p - f\|_a \leq \varepsilon$ cqfd